

*„Multiple Description Coding mittels
kaskadierter korrelierender
Transformationen“*

vorgelegt von
Diplom-Ingenieur
Rüdiger Knörig
aus Berlin

von der Fakultät IV - Elektrotechnik und Informatik
der Technischen Universität Berlin

zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Ingenieurwissenschaften
–Dr. Ing.–

genehmigte Dissertation

Mentor:
Prof. Dr.-Ing. Thomas Sikora

Berichter:
Prof. Dr.-Ing. Jens-Rainer Ohm

Vorsitzender des Promotionsausschusses:
Prof. Dr.-Ing. Thomas Wiegand

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 18.06.2010

Berlin 2010
D83

Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein *multiple description transform coding*-Ansatz vorgestellt, welcher als *joint source channel*-Ansatz stufenlose Kompromisse zwischen dem Quellencodierungsaspekt der Kompression und dem Kanalcodierungsaspekt der Fehlerverschleierung bietet.

Die vorgestellte Lösung beruht im Wesentlichen auf der von Goyal in [GKAV] angedachten kaskadierten Version der bekannten (s. [GK98] , [WOR99] , [RAG00] oder [Goy01b]) 2×2 korrelierenden Transformation, welche einen variablen Anteil an Quellenkorrelation im Signal beläßt bzw. zusätzliche Korrelationen erzeugt, und einen darauf aufbauenden Schätzer, welcher diese Korrelationen für die Fehlerverschleierung ausnutzt.

Im Gegensatz zu klassischen Verfahren der Kanalcodierung kann der Anteil an der für den Fehlerschutz aufgewendeten Redundanz stufenlos den Übertragungsverhältnissen angepaßt werden, womit je nach Kanalqualität sehr gute lokale Kompromisse zwischen Kompression und Fehlerrobustheit möglich sind. Damit eignet sich dieser Ansatz besonders für Kanäle mit stark wechselnder Qualität, wie etwa Internet-Datenübertragungen oder Funkkanäle.

Da der Ansatz auf der klassischen Transformationscodierung beruht, kann er transparent in bestehende Transformationscodierungssysteme eingesetzt werden. Senderseitig ist nur die Transformationskomponente zu wechseln, empfängerseitig muß nur die inverse Transformation gegen den Schätzer ausgetauscht werden.

Die besten Ergebnisse hinsichtlich einer hohen Fehlerrobustheit bei einer möglichst geringen Datenrate wurden allerdings durch eine Kombination der DST mit der erarbeiteten Schätzlösung erzielt.

Der Schätzer kann auch zur Verbesserung der Rekonstruktion aus den quantisierten Transformationskoeffizienten bekannter orthonormaler Transformationen wie der DCT genutzt werden, indem zu Null quantisierte Transformationskoeffizienten wie Übertragungsfehler angesehen werden. Da die Schätzkomponente auch bei nichtadaptiven orthonormalen Transformationen wie der DCT einen kleinen Gewinn liefert, könnte so eine Verbesserung der Rekonstruktion erzielt werden.

Abstract

This work covers a new multiple description transform coding approach which, seen as a joint source-channel-coder, provides stepless trade-offs between the source coding goal of a high compression ratio and the channel coding goal of a high robustness against channel errors.

The proposed solution consists of two main parts. The first one is a new kind of transformation, based on the idea of Goyal et al in [Goy01b] to cascade the well-known elementary 2×2 correlating transform (see [GK98] , [WOR99] ,[RAG00] or [Goy01b]) for gaining transforms of higher order. The correlating transform can be varied stepless regarding the amount of correlation it left or creates in the transformed signal.

The second part is a MSE-optimal estimator which uses this variable amount of correlation to estimate a reconstruction of the input signal from a subset of transform coefficients. This would be necessary in case of transmission errors resulting in coefficient losses.

With this approach one can select fine-tuned trade-offs between efficient compression (less redundancy) and channel error robustness (more redundancy) depending on the actual channel situation. Therefore this approach will be most useful with channels strongly varying regarding their transmission quality, like wireless transmissions (fading effects) or internet transmissions (network congestions).

Since the approach is a classic transform coding approach it can be integrated in existing transform coding systems easily.

However the best results regarding a high error robustness at a low data rate has been achieved with a combination of the DST transform with the derived estimator.

The estimator component could also be used to improve the reconstruction from heavily quantized transform coding coefficients by interpreting coefficients with a zero bit substrate as missing. As the results show there is a noticable gain for the two-dimensional DCT transform used in current image coding standards like JPEG.

Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, die vorliegende Arbeit selbständig, ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der von mir angegebenen Quellen angefertigt zu haben. Alle aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche gekennzeichnet. Die Arbeit wurde noch keiner Prüfungsbehörde in gleicher oder ähnlicher Form vorgelegt.

Berlin, den 15. Juli 2010

(Rüdiger Knörig)

Danksagung

An dieser Stelle soll all denjenigen die nötige Referenz erwiesen werden, ohne die diese Arbeit nie entstanden wäre. Da sind an erster Stelle meine Eltern zu nennen, denen ich nicht nur die Existenz an sich, sondern auch die liebevolle Zuwendung und Unterstützung verdanke, so daß ich meine Neigung zu den Naturwissenschaften auch entfalten konnte.

Unabdingbar war das Wirken meiner Lehrer an Schule und Hochschule, ohne deren solide gebautes Fundament ich diese Arbeit nicht hätte errichten können. Die heutige Zeit beweist, daß dies keine Selbstverständlichkeit ist. Ich danke in dieser Hinsicht besonders meinem ehemaligen Mathematiklehrer Liebmann für die fundierten mathematischen Kenntnisse und die naturwissenschaftliche Denkweise, wie auch Herrn Professor Noll für seine ausgezeichneten Vorlesungen zur Nachrichtentechnik.

Meinem Doktorvater, Herrn Professor Sikora, danke ich für die Anleitungen und Denkanstöße, wie all meinen Kollegen, die mir zuweilen den Faden wieder aufhoben, wenn ich „den Wald vor lauter Bäumen nicht mehr gesehen habe.“

Ich danke meiner Verbindung, der B! Gothia, nicht nur für die unvergeßlichen Stunden in ihren Reihen, sondern auch für die Möglichkeit, des, über jegliches fachliches Studium hinausgehende, charakterlichen und geistigen Reifens zum Akademiker.

Meiner An danke ich für die Geduld und das Verständnis, mir ein halbes Jahr für die Fertigstellung dieser Arbeit zu schenken.

Unvollständig wäre diese Danksagung ohne Referenz an all diejenigen Programmierer, welche der Menschheit unentgeltlich all die mächtigen und zuverlässigen Programme geschenkt haben, ohne die diese Arbeit kaum entstanden wäre. Dies betrifft vor allem das Textsatzsystem \LaTeX , die Plotprogramme Gnuplot und PyX-Plot, die Vektorgrafikbeschreibungssprache Asymptote, die numerischen und symbolischen Mathematikprogramme Octave und Maxima, den GnuC/C++-Compiler, das Java-Entwicklungspaket, die integrierte Entwicklungsumgebung Eclipse und nicht zuletzt das Linux-Betriebssystem.

Jedes dieser Werkzeuge hat bei der Erstellung dieser Arbeit unschätzbare Hilfe geleistet – mein Dank den uneigennützigen Entwicklern.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	25
1.1	Die Aufgaben der Kodierung	25
1.1.1	Die Quellencodierung	26
1.1.2	Die Kanalcodierung	43
1.2	Multiple Description Coding	44
1.3	Quellenmodellierung.	46
1.3.1	Das eindimensionale AR(1)-Modell	46
1.3.2	Zweidimensionale AR(1)-Modelle für Bildsignale.	48
1.3.3	Korrelationsmatrix separierbarer zweidimensionaler AR(1)-Quellensignale	49
1.3.4	Kronecker-Faktorisierung einer approximierten eindimen- sionalen AR(1)-Korrelationsmatrix	50
2	Theorie	52
2.1	Die (de)korrelierende Transformation	52
2.1.1	Die (de)korrelierende Transformation im \mathbb{R}^2	53
2.1.2	Der optimale Schätzer für die 2×2 -Transformation	57
2.1.3	Die kaskadierte korrelierende Transformation (CCT).	59
2.2	Der Dekoder	68
2.2.1	Der kaskadierte lokale Schätzer	68
2.2.2	Die globale Lösung	72
2.2.3	Separierbare 2D-Transformationen	75
2.2.4	Generelle 2D-Transformationen	77

3	Evaluierung an Videodaten.	80
3.1	Der Demonstrator	81
3.1.1	Funktionsbeschreibung des Demonstrators	81
3.1.2	Implementierung des Demonstrators.	87
3.2	Ergebnisse der Evaluierung an Videodaten	92
3.2.1	Verwendung generischer Quellenkorrelationsmatrizen. . . .	102
3.3	Zusammenfassung der Evaluierung an Videodaten	104
4	Theoretische Evaluierung	106
4.1	Einleitung	106
4.2	Quellencodierung	107
4.2.1	Untersuchung für den Fall $N = 2$	107
4.2.2	Generelle Lösung	115
4.2.3	Evaluierung der Quellencodierungsleistung	123
4.3	Der Kanalcodierungsaspekt.	129
4.3.1	Theoretische Abschätzung der Korrekturleistung für AR(1)-Quellen	129
4.3.2	Die Modellierung des Fehlermusters	129
4.3.3	Umsetzung	133
4.3.4	Ergebnisse für eindimensionale Transformationen und AR(1)-Modelle	134
4.3.5	Ergebnisse für zweidimensionale Transformationen	144
4.3.6	Parametereinfluß	144
4.4	Gesamtbetrachtung	153
4.4.1	Ergebnisse für eindimensionale AR(1)-Daten und Transfor- mationen	154
4.4.2	Ergebnisse für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und separierbare Transformationen	160
4.5	Verifikation der Gesamtbetrachtung	166
4.5.1	Ergebnisse für eindimensionale AR(1)-Signale	170
4.5.2	Vergleich mit der theoretischen Gesamtbetrachtung für das eindimensionale Szenario.	172

4.5.3	Ergebnisse für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten	178
4.5.4	Ergebnisse für die Begrenzung der Schätzung auf die ersten N_{Limit} Transformationskoeffizienten	197
4.5.5	Korrektur von Nullquantisierungen	204
4.5.6	Vergleich mit der theoretischen Gesamtbetrachtung für das zweidimensionale Szenario.	208
4.6	Paketszenario	213
4.6.1	Evaluierung des paketorientierten Szenarios	214
4.6.2	Ergebnisse für $N=4$	216
4.6.3	Ergebnisse für $N=16$	219
5	Schlußbetrachtung	222
5.1	Resümee	222
5.2	Ausblick	224
A	Definitionen und Beweise	227
A.1	Definitionen	227
A.2	Beweise	228
B	Quelltexte	232
B.1	Verifikation der Äquivalenz von kaskadierter und separierter zweidimensionaler Transformation durch Induktion.	232
B.2	Berechnung $\gamma_{CCT}(N, \alpha, \rho)$	233

Tabellenverzeichnis

3.1	Numerische Resultate aus den Bildbeispielen für $P_{err} = 10^{-2}$ und $L_{burst}=5$ aus den Bildbeispielen in den Abbildungen 3.5 bis 3.14.	99
3.2	Gemittelte Simulationsergebnisse für $L_{burst} = 5$ und $P_{err} = 10^{-2}$ (100 Versuche).	100
3.3	Ergebnisse der Evaluierung generischer Quellenkorrelationsmatrizen ($P_{err} = 10^{-2}$, $L_{burst} = 5$, gemittelt über 100 Versuche).	102
3.4	Ergebnisse der Evaluierung von zweidimensionalen generischen AR(1)-Modellen ($P_{err} = 10^{-2}$, $L_{burst} = 5$, gemittelt über 100 Versuche).	104
4.1	Gammafaktoren und Mindestraten für eine Transformationsbreite $N = 16$ und eine Quellenkorrelation $\varrho = 0.96$	124
4.2	Gammafaktoren und Mindestraten für eine Transformationsbreite $N = 16$ und eine Quellenkorrelation $\varrho = 0.98$	125
4.3	Gammafaktoren und Mindestraten für eine Transformationsbreite $N = 64$ und eine Quellenkorrelation $\varrho = 0.96$	126
4.4	Gammafaktoren und Mindestraten für eine Transformationsbreite $N = 64$ und eine Quellenkorrelation $\varrho = 0.98$	127
4.5	Einfluß der Transformationsgröße N auf das γ -Verhältnis für separierbare zweidimensionale Transformationen und separierbare zweidimensionale AR(1)-Daten mit $\varrho = 0,96$	127
4.6	Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für eindimensionale Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=4$, einer Quellenkorrelation $\varrho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 0,01$	138

4.7	Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für eindimensionale Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=8$, einer Quellenkorrelation $\rho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 0,01$	139
4.8	Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für eindimensionale Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\rho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 0,01$	140
4.9	Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für eindimensionale Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\rho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 0,1$	141
4.10	Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für eindimensionale Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\rho = 0,98$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 0,01$	142
4.11	Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für zweidimensionale separierbare Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=4$, einer Quellenkorrelation $\rho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 0,01$	147
4.12	Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für zweidimensionale separierbare Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=4$, einer Quellenkorrelation $\rho = 0,98$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 0,01$	148
4.13	Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für zweidimensionale separierbare Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\rho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 0,01$	149
4.14	Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für zweidimensionale separierbare Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\rho = 0,98$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 0,01$	150
4.15	Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für zweidimensionale separierbare Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\rho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 0,1$	151
4.16	Für die Evaluierung der Gesamtbetrachtung verwendete σ_K^2 -Werte aus den Tabellen im Abschnitt 4.3 für das Szenario $N = 16$ bzw. separierbare 4×4 -Transformation und $\rho = 0,96$	154

4.17	Ergebnisse der Gesamtbetrachtung für $N = 16$, $\rho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-2}$ für eindimensionale AR(1)-Quellensignale und Transformationen.	157
4.18	Ergebnisse der Gesamtbetrachtung für $N = 16$, $\rho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-1}$ für eindimensionale AR(1)-Quellensignale und Transformationen.	158
4.19	Raten, ab denen die CCT bessere Ergebnisse erzielt als die DCT bzw. DST. Ergebnisse für $N = 16$, $\rho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-2}$ für eindimensionale AR(1)-Quellensignale und Transformationen. . . .	159
4.20	Raten, ab denen die CCT bessere Ergebnisse erzielt als die DCT bzw. DST. Ergebnisse für $N = 16$, $\rho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-1}$ für eindimensionale AR(1)-Quellensignale und Transformationen. . . .	159
4.21	Ergebnisse der Gesamtbetrachtung für $N = 16$, $\rho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-2}$ für separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellensignale und Transformationen.	163
4.22	Ergebnisse der Gesamtbetrachtung für $N = 16$, $\rho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-1}$ für separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellensignale und Transformationen.	164
4.23	Raten, ab denen die CCT bessere Ergebnisse erzielt als die DCT bzw. DST. Ergebnisse für $N = 16$, $\rho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-2}$ für separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellensignale und Transformationen.	165
4.24	Raten, ab denen die CCT bessere Ergebnisse erzielt als die DCT bzw. DST. Ergebnisse für $N = 16$, $\rho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-1}$ für separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellensignale und Transformationen.	165
4.25	Simulationsergebnisse für die erzielte Entropierate in Bit/Koeffizient, gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$). Quellenmodell: sep. 2D-AR(1). Orthonormale Transformationen sind separierbar zweidimensional. Die Entropie wird über das Histogrammverfahren ermittelt.	180
4.26	Simulationsergebnisse für den erzielten SNR_{dB} , gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$). Quellenmodell: sep. 2D-AR(1). Orthonormale Transformationen sind separierbar zweidimensional.	181

4.27	Simulationsergebnisse für die erzielte Entropierate in Bit/Koeffizient, gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\varrho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-1}$). Quellenmodell: sep. 2D-AR(1). Orthonormale Transformationen sind separierbar zweidimensional. Die Entropie wird über das Histogrammverfahren ermittelt.	181
4.28	Simulationsergebnisse für den erzielten SNR_{dB} , gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\varrho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-1}$). Quellenmodell: sep. 2D-AR(1). Orthonormale Transformationen sind separierbar zweidimensional.	182
4.29	Simulationsergebnisse für die erzielte Entropierate in Bit/Koeffizient, gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\varrho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-2}$). Orthonormale Transformationen sind eindimensional. Die Entropie wird über das Histogrammverfahren ermittelt. .	186
4.30	Simulationsergebnisse für den erzielten SNR_{dB} , gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\varrho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-2}$). Quellenmodell: sep. 2D-AR(1). Orthonormale Transformationen sind eindimensional.	187
4.31	Simulationsergebnisse für die erzielte Entropierate in Bit/Koeffizient, gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\varrho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-1}$). Orthonormale Transformationen sind eindimensional. Die Entropie wird über das Histogrammverfahren ermittelt. .	187
4.32	Simulationsergebnisse für den erzielten SNR_{dB} , gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\varrho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-1}$). Quellenmodell: sep. 2D-AR(1). Orthonormale Transformationen sind eindimensional.	188
4.33	Simulationsergebnisse für die erzielte Entropierate in Bit/Koeffizient, gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\varrho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-1}$). Quellenmodell: sep. 2D-AR(1). Orthonormale Transformationen sind separierbar zweidimensional. Die Entropie wird über das Histogrammverfahren ermittelt.	198
4.34	Simulationsergebnisse für den erzielten SNR_{dB} , gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\varrho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-1}$). Fehlerverschleierung nur für die ersten 4 Transformationskoeffizienten. Quellenmodell: sep. 2D-AR(1). Orthonormale Transformationen sind separierbar zweidimensional.	199

4.35	Simulationsergebnisse für die erzielte Entropierate in Bit/Koeffizient, gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\varrho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-1}$). Quellenmodell: sep. 2D-AR(1). Orthonormale Transformationen sind separierbar zweidimensional. Die Entropie wird über das Histogrammverfahren ermittelt.	199
4.36	Simulationsergebnisse für den erzielten SNR_{dB} , gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\varrho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-1}$). Fehlerverschleierung nur für die ersten 2 Transformationskoeffizienten. Quellenmodell: sep. 2D-AR(1). Orthonormale Transformationen sind separierbar zweidimensional.	200
4.37	Simulationsergebnisse für den erzielten SNR_{dB} , gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\varrho = 0.96$, $P_{err} = 0$). Quellenmodell: sep. 2D-AR(1). Orthonormale Transformationen sind separierbar zweidimensional.	204
4.38	Simulationsergebnisse für den erzielten SNR_{dB} , gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\varrho = 0.96$, $P_{err} = 0$). Nullquantisierte Transformationskoeffizienten werden nicht zum Fehlervektor gezählt. Quellenmodell: sep. 2D-AR(1). Orthonormale Transformationen sind separierbar zweidimensional. Die Entropie wird über das Histogrammverfahren ermittelt.	205

Abbildungsverzeichnis

1.1	Quellen- und Kanalcodierung im Rahmen der Datenübertragung/Speicherung.	25
1.2	Rate-Distortion-Funktion einer diskreten Quelle.	28
1.3	Schema eines generellen Transformationskodierungssystems. . . .	29
1.4	Interpretation der KLT als Hauptachsentransformation.	36
1.5	Links: Audiosignal, rechts: Wertepaardarstellung benachbarter Werte.	37
1.6	Der verallgemeinerte <i>Multiple Description Coding</i> -Ansatz	45
1.7	Realisierung einer AR(1)-Modellquelle.	46
2.1	Basisvektoren der korrelierenden Transformation in Abhängigkeit von α	54
2.2	Faktorisierung der korrelierenden 2×2 -Transformation in zwei Untertransformationen.	55
2.3	Links: Korrelation des Ausgangssignals. Rechts: Entwicklung des Transformationsgewinns mit steigender Nichtorthonormalität ($\rho = 0,96$).	57
2.4	Kritisch abgetastete zweikanalige Filterbank als Analogie zur Transformation mit der kaskadierenden Transformation.	60
2.5	Amplitudenspektrum der Analysefilter (durchgezogen für $\alpha = 1/\sqrt{2} + 0.1$, gestrichelt für $\alpha = 1/\sqrt{2}$)	62
2.6	Entstehung der Aliasanteile (grau eingezeichnet) bei einer kritisch abgetasteten zweikanaligen Filterbank.	63
2.7	Kaskadierte korrelierende Transformation nach dem Vorschlag in [GKAV].	65
2.8	Teilbandcodierer für $M = 4$	65

2.9	Der Ansatz zur kaskadierten lokalen Fehlerverschleierung.	69
2.10	Robustheit der kaskadierten lokalen Schätzer gegenüber Übertragungsfehlern.	71
2.11	Rate-Distortion-Vergleich zwischen der CCT (orthogonal und für $\varepsilon = 0.002$) und der DCT.	71
2.12	Änderung des Fehlermodells bei zweidimensionaler separierbarer Transformation.	76
3.1	Demonstrationsprogramm nach dem Start	82
3.2	Einstellmöglichkeiten zur Transformation und Rekonstruktion. . .	84
3.3	Einstellmöglichkeiten zur Kanalsimulation.	86
3.4	Ergebnisdarstellung.	86
3.5	Resultate für die eindimensionale DCT, ohne (links, $pSNR_{dB} = 29,01$ dB) und mit (rechts, $pSNR_{dB} = 29,42$ dB) der optimalen Schätzlösung ($H = 4,95$ bpp).	92
3.6	Resultate für die separierbare 2D-DCT, ohne (links, $pSNR_{dB} = 29,02$ dB) und mit (rechts, $pSNR_{dB} = 29,37$ dB) der optimalen Schätzlösung ($H = 2,34$ bpp).	93
3.7	Resultate für die eindimensionale DST, ohne (links, $pSNR_{dB} = 28,37$ dB) und mit (rechts, $SpNR_{dB} = 49,95$ dB) der optimalen Schätzlösung ($H = 5,83$ bpp).	94
3.8	Resultate für die separierbare 2D-DST, ohne (links, $pSNR_{dB} = 28,05$ dB) und mit (rechts, $pSNR_{dB} = 48,14$ dB) der optimalen Schätzlösung ($H = 5,02$ bpp).	95
3.9	Resultate für die eindimensionale KLT, ohne (links, $pSNR_{dB} = 23,78$ dB) und mit (rechts, $pSNR_{dB} = 23,78$ dB) der optimalen Schätzlösung ($H = 3,69$ bpp).	96
3.10	Resultate für die separierbare 2D-KLT, ohne (links, $pSNR_{dB} = 23,77$ dB) und mit (rechts, $pSNR_{dB} = 24,15$ dB) der optimalen Schätzlösung ($H = 3,69$ bpp).	96
3.11	Resultate für die Einheitstransformation, ohne (links, $pSNR_{dB} = 25,38$ dB) und mit (rechts, $SpNR_{dB} = 70,6$ dB) der optimalen Schätzlösung ($H = 7,26$ bpp).	97
3.12	Resultate für die CCT ($\varepsilon = 0.0$), ohne (links, $pSNR_{dB} = 29,18$ dB) und mit (rechts, $pSNR_{dB} = 29,56$ dB) der optimalen Schätzlösung ($H = 4,38$ bpp).	97

3.13	Resultate für die CCT ($\varepsilon = 0.02$), ohne (links, $pSNR_{dB} = 29,07$ dB) und mit (rechts, $pSNR_{dB} = 57,45$ dB) der optimalen Schätzlösung ($H = 4,71$ bpp).	98
3.14	Resultate für die CCT ($\varepsilon = 0.08$), ohne (links, $pSNR_{dB} = 27,62$ dB) und mit (rechts, $pSNR_{dB} = 62,23$ dB) der optimalen Schätzlösung ($H = 5,44$ bpp).	98
3.15	Über 100 Versuche gemittelte Ergebnisse der Evaluierung an Bilddaten für die Schätzlösung aus Gleichung 2.101.	99
3.16	Entwicklung der Entropie i.A. von ε . Ergebnisse der Evaluierung an Bilddaten, gemittelt über 100 Versuche.	101
3.17	Entwicklung des $pSNR_{dB}$ i.A. von ε . Ergebnisse der Evaluierung an Bilddaten, gemittelt über 100 Versuche.	101
3.18	Ergebnisse der Evaluierung generischer Quellenkorrelationsmatrizen ($P_{err} = 10^{-2}$, $L_{burst} = 5$, gemittelt über 100 Versuche).	103
3.19	Ergebnisse der Evaluierung der zweidimensionalen generischer AR(1)-Modelle ($P_{err} = 10^{-2}$, $L_{burst} = 5$, gemittelt über 100 Versuche).	105
4.1	Signalzuordnung für die Untersuchung des Quellencodierungsspekts im \mathbb{R}^2	107
4.2	Distortion-Rate-Lösung aus Gleichung 4.36 für verschiedene Transformationen und der für Bildsignale typischen Quellenkorrelation von $\rho = 0,95$	115
4.3	Distortion-Rate-Lösung aus Gleichung 4.36 für verschiedene Transformationen und Quellenkorrelationen.	115
4.4	Rate-Distortion-Lösung aus Gleichung 4.37 für verschiedene Transformationen und Quellenkorrelationen.	116
4.5	Entwicklung von $\kappa_N(\epsilon)$ nach Gleichung 4.78.	118
4.6	Entwicklung von $\frac{\gamma_{CCT\varepsilon}}{\gamma_{DCTsep. 2D}}$ für separierbare 8×8 -Transformationen und der für Bildsignale typischen Quellenkorrelation von $\rho = 0,96$ (separierbares zweidimensionales AR(1)-Quellenmodell).	128
4.7	Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für eindimensionale Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=4$, einer Quellenkorrelation $\rho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 10^{-2}$	135

4.8	Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für eindimensionale Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=8$, einer Quellenkorrelation $\varrho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 10^{-2}$	136
4.9	Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für eindimensionale Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\varrho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 10^{-2}$	137
4.10	Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für eindimensionale Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\varrho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 10^{-1}$	137
4.11	Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für eindimensionale Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\varrho = 0,98$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 10^{-2}$	143
4.12	Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für eindimensionale Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\varrho = 0,98$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 10^{-1}$	143
4.13	Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für zweidimensionale separierbare Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\varrho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 10^{-2}$	145
4.14	Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für zweidimensionale separierbare Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\varrho = 0,98$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 10^{-2}$	146
4.15	Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für zweidimensionale separierbare Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\varrho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 10^{-1}$	146
4.16	Gegenüberstellung der Ergebnisse für verschiedene N bei einer Quellenkorrelation $\varrho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 10^{-2}$. . .	152
4.17	Gegenüberstellung der Ergebnisse für verschiedene ϱ bei einer Transformationsbreite $N = 16$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 10^{-2}$. .	152
4.18	Gegenüberstellung der Ergebnisse für verschiedene P_{err} bei einer Transformationsbreite $N = 16$ und einer Quellenkorrelation $\varrho = 0,96$	152

4.19	Ergebnisse der Gesamtbetrachtung für eindimensionale AR(1)-Daten und eindimensionale Transformationen für $N = 16$, $\rho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-2}$	155
4.20	Ergebnisse der Gesamtbetrachtung für eindimensionale AR(1)-Daten und eindimensionale Transformationen für $N = 16$, $\rho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-1}$	156
4.21	Ergebnisse der Gesamtbetrachtung für eindimensionale AR(1)-Daten und eindimensionale Transformationen für $N = 16$, $\rho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-2}$ (reduzierte Transformationenanzahl).	156
4.22	Ergebnisse der Gesamtbetrachtung für eindimensionale AR(1)-Daten und eindimensionale Transformationen für $N = 16$, $\rho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-1}$ (reduzierte Transformationenanzahl).	159
4.23	Ergebnisse der Gesamtbetrachtung für separierbare zweidimensionale AR(1)-Daten und separierbare zweidimensionale Transformationen für $N = 16$, $\rho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-2}$	160
4.24	Ergebnisse der Gesamtbetrachtung für separierbare zweidimensionale AR(1)-Daten und separierbare zweidimensionale Transformationen für $N = 16$, $\rho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-1}$	161
4.25	Ergebnisse der Gesamtbetrachtung für separierbare zweidimensionale AR(1)-Daten und separierbare zweidimensionale Transformationen für $N = 16$, $\rho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-2}$ (reduzierte Transformationenanzahl).	162
4.26	Ergebnisse der Gesamtbetrachtung für separierbare zweidimensionale AR(1)-Daten und separierbare zweidimensionale Transformationen für $N = 16$, $\rho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-1}$ (reduzierte Transformationenanzahl).	162
4.27	Entwicklung der Huffmancodierer-Ausgangsrate in Abhängigkeit von der Zielrate für alle Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 1000000 Versuche gemittelt).	170
4.28	Entwicklung der über die Histogramm-Methode geschätzten Entropie in Abhängigkeit von der Zielrate für alle Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 1000000 Versuche gemittelt).	171
4.29	Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Entropierate für alle Transformationen und für eindimensionale AR(1)-Daten und eindimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	172

4.30	Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Entropierate für die enge Gruppe von Transformationen und für eindimensionale AR(1)-Daten und eindimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	173
4.31	Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Entropierate für die abweichende Gruppe von Transformationen und für eindimensionale AR(1)-Daten und eindimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	174
4.32	Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für eindimensionale AR(1)-Signale und die eindimensionale KLT ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 1D AR(1)-Modell).	174
4.33	Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für eindimensionale AR(1)-Signale und die eindimensionale DCT ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 1D AR(1)-Modell).	175
4.34	Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für eindimensionale AR(1)-Signale und die eindimensionale DST ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 1D AR(1)-Modell).	175
4.35	Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für eindimensionale AR(1)-Signale und die $CCT_{\varepsilon=0}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 1D AR(1)-Modell).	176
4.36	Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für eindimensionale AR(1)-Signale und die $CCT_{\varepsilon=0,02}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 1D AR(1)-Modell).	176
4.37	Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für eindimensionale AR(1)-Signale und die $CCT_{\varepsilon=0,2}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 1D AR(1)-Modell).	177
4.38	Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für eindimensionale AR(1)-Signale und die $CCT_{\varepsilon=0,4}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 1D AR(1)-Modell).	177
4.39	Entwicklung der Huffman-codierter-Ausgangsrate in Abhängigkeit von der Zielrate für alle Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 1000000 Versuche gemittelt).	178
4.40	Entwicklung der über die Histogramm-Methode geschätzten Entropie in Abhängigkeit von der Zielrate für alle Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 1000000 Versuche gemittelt).	179

4.41	Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Zielrate für alle Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und separierbare zweidimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	182
4.42	Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Zielrate für die enge Gruppe von Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und separierbare zweidimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	183
4.43	Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Zielrate für die abweichende Gruppe von Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und separierbare zweidimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	183
4.44	Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Zielrate für alle Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und separierbare zweidimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	184
4.45	Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Zielrate für die enge Gruppe von Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und separierbare zweidimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	184
4.46	Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Zielrate für die abweichende Gruppe von Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und separierbare zweidimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	185
4.47	Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Zielrate für alle Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und eindimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	188
4.48	Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Zielrate für die enge Gruppe von Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und eindimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	189

4.49	Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Zielrate für die abweichende Gruppe von Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und eindimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	189
4.50	Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Zielrate für alle Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und eindimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	190
4.51	Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Zielrate für die enge Gruppe von Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und eindimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	190
4.52	Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Zielrate für die abweichende Gruppe von Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und eindimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	191
4.53	Vergleich zwischen den Ergebnissen für das eindimensionale und das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell für die KLT ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	193
4.54	Vergleich zwischen den Ergebnissen für das eindimensionale und das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell für die DCT ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	193
4.55	Vergleich zwischen den Ergebnissen für das eindimensionale und das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell für die DST ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	194
4.56	Vergleich zwischen den Ergebnissen für das eindimensionale und das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell für die $CCT_{\varepsilon=0}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	194

4.57 Vergleich zwischen den Ergebnissen für das eindimensionale und das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell für die $CCT_{\varepsilon=0,01}$ ($N = 16, \rho = 0,96, P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	195
4.58 Vergleich zwischen den Ergebnissen für das eindimensionale und das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell für die $CCT_{\varepsilon=0,02}$ ($N = 16, \rho = 0,96, P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	195
4.59 Vergleich zwischen den Ergebnissen für das eindimensionale und das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell für die $CCT_{\varepsilon=0,2}$ ($N = 16, \rho = 0,96, P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	196
4.60 Vergleich zwischen den Ergebnissen für das eindimensionale und das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell für die $CCT_{\varepsilon=0,4}$ ($N = 16, \rho = 0,96, P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	196
4.61 Evaluierung der Begrenzung der Fehlerkorrektur auf die ersten N_{Limit} Transformationskoeffizienten für die separierbare zweidimensionale DCT ($N = 16, \rho = 0,96, P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	200
4.62 Evaluierung der Begrenzung der Fehlerkorrektur auf die ersten N_{Limit} Transformationskoeffizienten für die separierbare zweidimensionale DST ($N = 16, \rho = 0,96, P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	201
4.63 Evaluierung der Begrenzung der Fehlerkorrektur auf die ersten N_{Limit} Transformationskoeffizienten für die $CCT_{\varepsilon=0,0}$ ($N = 16, \rho = 0,96, P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	201
4.64 Evaluierung der Begrenzung der Fehlerkorrektur auf die ersten N_{Limit} Transformationskoeffizienten für die $CCT_{\varepsilon=0,01}$ ($N = 16, \rho = 0,96, P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	202
4.65 Evaluierung der Begrenzung der Fehlerkorrektur auf die ersten N_{Limit} Transformationskoeffizienten für die $CCT_{\varepsilon=0,02}$ ($N = 16, \rho = 0,96, P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	202
4.66 Evaluierung der Begrenzung der Fehlerkorrektur auf die ersten N_{Limit} Transformationskoeffizienten für die $CCT_{\varepsilon=0,2}$ ($N = 16, \rho = 0,96, P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	203
4.67 Evaluierung der Begrenzung der Fehlerkorrektur auf die ersten N_{Limit} Transformationskoeffizienten für die $CCT_{\varepsilon=0,4}$ ($N = 16, \rho = 0,96, P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	203

4.68	Ergebnisse für die Korrektur von Nullquantisierungen für das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell und für die separierbare zweidimensionale KLT ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 0$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	205
4.69	Ergebnisse für die Korrektur von Nullquantisierungen für das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell und für die separierbare zweidimensionale DCT ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 0$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	206
4.70	Ergebnisse für die Korrektur von Nullquantisierungen für das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell und für die separierbare zweidimensionale DST ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 0$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	206
4.71	Ergebnisse für die Korrektur von Nullquantisierungen für das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell und für die $CCT_{\varepsilon=0}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 0$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).	207
4.72	Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für separierbare zweidimensionale AR(1)-Signale und die separierbare zweidimensionale KLT ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 2D AR(1)-Modell).	209
4.73	Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für separierbare zweidimensionale AR(1)-Signale und die separierbare zweidimensionale DCT ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 2D AR(1)-Modell).	209
4.74	Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für separierbare zweidimensionale AR(1)-Signale und die separierbare zweidimensionale DST ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 2D AR(1)-Modell).	210
4.75	Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für separierbare zweidimensionale AR(1)-Signale und die $CCT_{\varepsilon=0}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 2D AR(1)-Modell).	210
4.76	Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für separierbare zweidimensionale AR(1)-Signale und die $CCT_{\varepsilon=0,02}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 2D AR(1)-Modell).	211
4.77	Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für separierbare zweidimensionale AR(1)-Signale und die $CCT_{\varepsilon=0,2}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 2D AR(1)-Modell).	211

4.78	Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für separierbare zweidimensionale AR(1)-Signale und die $CCT_{\varepsilon=0,4}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 2D AR(1)-Modell). . .	212
4.79	Vergleich zwischen dem Szenario der sofortigen Übertragung und einer paktorientierten Übertragung (DCT nur mit \mathbf{T}^{-1} , $N = 4$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Paketziellänge=1024 Bit, Ergebnisse über 1000000 Versuche gemittelt).	217
4.80	Vergleich zwischen dem Szenario der sofortigen Übertragung und einer paktorientierten Übertragung (DST mit Schätzer, $N = 4$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Paketziellänge=1024 Bit, Ergebnisse über 1000000 Versuche gemittelt).	217
4.81	Vergleich zwischen dem Szenario der sofortigen Übertragung und einer paktorientierten Übertragung ($CCT_{\varepsilon=0,02}$ nur mit \mathbf{T}^{-1} , $N = 4$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Paketziellänge=1024 Bit, Ergebnisse über 1000000 Versuche gemittelt).	218
4.82	Vergleich zwischen dem Szenario der sofortigen Übertragung und einer paktorientierten Übertragung ($CCT_{\varepsilon=0,4}$ nur mit \mathbf{T}^{-1} , $N = 4$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Paketziellänge=1024 Bit, Ergebnisse über 1000000 Versuche gemittelt).	218
4.83	Vergleich zwischen dem Szenario der sofortigen Übertragung und einer paktorientierten Übertragung (DCT nur mit \mathbf{T}^{-1} , $N = 4$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Paketziellänge=1024 Bit, Ergebnisse über 1000000 Versuche gemittelt).	219
4.84	Vergleich zwischen dem Szenario der sofortigen Übertragung und einer paktorientierten Übertragung (DST mit Schätzer, $N = 4$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Paketziellänge=1024 Bit, Ergebnisse über 1000000 Versuche gemittelt).	220
4.85	Vergleich zwischen dem Szenario der sofortigen Übertragung und einer paktorientierten Übertragung ($CCT_{\varepsilon=0,02}$ nur mit \mathbf{T}^{-1} , $N = 4$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Paketziellänge=1024 Bit, Ergebnisse über 1000000 Versuche gemittelt).	220
4.86	Vergleich zwischen dem Szenario der sofortigen Übertragung und einer paktorientierten Übertragung ($CCT_{\varepsilon=0,4}$ nur mit \mathbf{T}^{-1} , $N = 4$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Paketziellänge=1024 Bit, Ergebnisse über 1000000 Versuche gemittelt).	221

Symbolverzeichnis

- α Parameter der CCT, s. Gleichung 2.2
- ADV Amplitudendichteverteilung
- AR(1) Autoregressives Quellenmodell erster Ordnung (s. Abschnitt 1.3.1, [Hän97], [Hay96], [Kay97], [PW93])
- CCT Cascaded Correlating Transform, die im Rahmen dieser Arbeit beschriebene korrelierende Transformation höherer Ordnung (s. Abschnitt 2.1.3, s. [KS07])
- D Verzerrung als mittlerer quadratischer Fehler je Abtastwert
- ϵ Parameterisiert $\alpha(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \epsilon$ als Maß der Nichtorthonormalität der CCT.
- $E\{x\}$ Erwartungswert von x (s. [Kay93], [Hän97]).
- \mathbf{I} Einheitsmatrix $\mathbf{I}(m, n) = \begin{cases} 1 & m \equiv n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$
- κ_N Betragsquadrat der Basisvektoren einer CCT_ϵ N -ter Ordnung.
- ${}^N\mathbf{T}$ Transformationsmatrix der Größe $N \times N$.
- PCM Pulse Code Modulation, Repräsentation diskreter Signale im Binärcode, s. [JN90], [Wag95]
- $pSNR_{dB}$ *Peak*-Signal-Rausch-Verhältnis, Variation des SNR_{dB} für die Beurteilung der Qualität einer Rekonstruktion \hat{x} von einem Originalsignal x (s. [AR05]).
- $$pSNR_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\max\{x\}^2}{E \{(x - \hat{x})^2\}} \right)$$
- R Bitrate je Abtastwert
- \mathbf{R}_{xx} Korrelationsmatrix $\mathbf{R}_{xx} = E \{ \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^H \}$.

SNR_{dB} Objektives Gütemaß, definiert als der dekadischer Logarithmus des Verhältnisses von Signalleistung P_{Signal} zur Rausch/Störleistung P_{Rausch} , angegeben in dB (s. [TKM00]).

$$SNR_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_{Signal}}{P_{Rausch}} \right)$$

ZDFT Zeitdiskrete Fouriertransformation, s. [PN08c], [Por96]

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Die Aufgaben der Kodierung

Die Aufgabe der Nachrichtenübertragung besteht in dem Transport von Informationen in Form ihrer physikalischen Repräsentationen, den Daten, über räumliche (Datenfernübertragung) und/oder zeitliche Distanzen (Datenspeicherung). Generell soll das Medium dieses Transports, sei es nun Speicher- oder Übertragungsmedium, als Kanal bezeichnet werden, welcher Sender und Empfänger verbindet.

Zur optimalen Umsetzung dieser Aufgabe müssen die Daten in andere Repräsentationen umkodiert werden. Die Umkodierung läßt sich hinsichtlich ihrer Zielrichtung in zwei unabhängige, ja in ihrer Wirkung entgegengesetzte Aspekte unterteilen; zum einen den Aspekt der

Quellencodierung, welche eine Kodierung mit dem Ziel der Kompression der Daten durchführt, und der

Kanalcodierung welche eine anschließende Kodierung für die Belange der Übertragung über den Kanal, d.h. eine Absicherung der Daten gegen Übertragungsfehler vornimmt.

Die Gesamtkodier/dekodierstrecke hat somit einen Aufbau gemäß Abbildung 1.1.

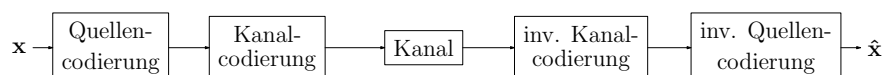


Abbildung 1.1: Quellen- und Kanalcodierung im Rahmen der Datenübertragung/Speicherung.

Die Grundgedanken dieser Teilaspekte der Kodierung werden in Folge dargelegt, ebenso die Bedeutung für diese Arbeit.

1.1.1 Die Quellencodierung

Die entscheidende Frage für die Datenkompression ist die Frage nach den Informationsanteilen, welche eingespart werden können. Diese lassen sich in zwei Arten unterteilen: redundante und irrelevante Anteile (s. [SCH91]).

1.1.1.1 Redundante Anteile

Redundante Anteile sind Informationen, welche ganz oder teilweise in vorhergehenden Übertragungen schon einmal übertragen worden sind. Somit bestehen zwischen dem aktuellen Datum und den vorhergehenden Daten statistische Bindungen, die sich aus dem zumindestens anteilmäßig gleichen Informationsgehalt ergeben.

Die redundanten Informationen entsprechen der Differenz zwischen dem Informationsgehalt durch isolierte Kenntnis des Quellensymbols $x[n]$ (s. [Nol00],[Ohm99],[Ohm95])

$$I\{x[n]\} = -\log_2 P(X = x[n]) \quad [bits] \quad (1.1)$$

und dem Informationsgehalt $I\{x[n] | x[n-1], x[n-2], \dots\}$ von $x[n]$ im Kontext seiner Vorgänger. Da diese Differenz

$$I\{x[n]; x[n-1], x[n-2], \dots\} = I\{x[n]\} - I\{x[n] | x[n-1], x[n-2], \dots\} \quad (1.2)$$

dem schon in den Vorgängern von $x[n]$ enthaltenen und somit redundanten Informationen über $x[n]$ entspricht, bezeichnet man sie auch als Transinformationsgehalt.

Die Aufgabe der Redundanzreduktion besteht in der *reversiblen* Transformation von x in eine Repräsentation y , so daß

$$H(Y) = H(x[n] | x[n-1], x[n-2], \dots) = H(X) - R(X) \quad (1.3)$$

gilt. Dies wird erreicht, wenn die statistischen Abhängigkeiten von x durch die Transformation beseitigt worden sind (s. Definition A.1.3 der statistischen Unabhängigkeit)

$$I\{y[n]\} = I\{x[n] | x[n-1], x[n-2], \dots\} \quad (1.4)$$

Der Operator $H(X)$ ist der Erwartungswert des Informationsgehalts von X

$$H(X) = E \{I\{x[n]\}\} = \sum_n P(X = x[n]) \cdot (-1) \cdot \log_2 P(X = x[n]) \quad (1.5)$$

die nachrichtentechnische Entropie von X . Die Entropie $H(X)$ ist der mittlere Informationsgehalt in $[bit/AW]$ der Quellsymbole $x[n]$ und somit auch die mittlere Bitrate R in $[bit/AW]$, die für die verlustlose Codierung der Quellsymbole mindestens aufgewendet werden muß (s. Quellencodierungstheorem von Shannon [Sha59]). Die Redundanz $R(X)$ ergibt sich über den Erwartungswert $H(x[n]; x[n-1], x[n-2], \dots)$ des Transinformationsgehaltes zu

$$R(X) = \underbrace{E \{I\{x[n]\}\}}_{\text{Entropie } H(X)} - \underbrace{E \{I\{x[n] \mid x[n-1], x[n-2], \dots\}\}}_{\text{bedingte Entropie } H(x[n] \mid x[n-1], x[n-2], \dots)} \quad (1.6)$$

1.1.1.2 Irrelevante Anteile

Irrelevante Anteile sind Informationen, welche für den eigentlichen Rezeptor, d.h. in den meisten Fällen den Menschen, eine ausreichend geringe Signifikanz haben, um als unwesentlich bzw. überhaupt nicht wahrnehmbar zu gelten. Beispiele für irrelevante Informationen sind sehr feine Details in Bildern, die der flüchtige Blick kaum wahrnimmt, oder Töne, deren Frequenz das menschliche Ohr nicht mehr wahrnehmen kann.

Entscheidend für die Irrelevanzreduktion ist somit eine Überführung in eine Repräsentation aus signifikanten und weniger signifikanten Elementen.

1.1.1.3 Rate-Distortion-Theorie

Die Rate-Distortion-Theorie beantwortet die Frage nach den maximal möglichen Einsparungen für eine vorgegebene Rekonstruktionsqualität, genauer nach der mittleren Restverzerrung D , welche bei einer vorgegebenen Datenrate R minimal verbleibt, d.h. bei Wahl des optimalen Codiervorgangs.

Zentrale Bedeutung hat dabei das Quellencodierungstheorem von Shannon ([Sha59]):

„Für die Codierung einer diskreten, gedächtnisfreien Quelle existiert, wenn eine Verzerrung kleiner oder gleich D zugelassen wird, ein Blockcode der Bitrate

$$R = R(D) + \varepsilon \quad (1.7)$$

mit $\varepsilon > 0$, wenn die Blocklänge des Codes groß genug gewählt wird.“

Die Forderungen nach „Gedächtnisfreiheit“ der Quelle bezieht sich auf die Abwesenheit statistischer Bindungen zwischen den Quellensymbolen und ist nach der Anwendung einer hinreichenden Redundanzreduktion (Transformationscodierung/lineare Prädiktion) erfüllt.

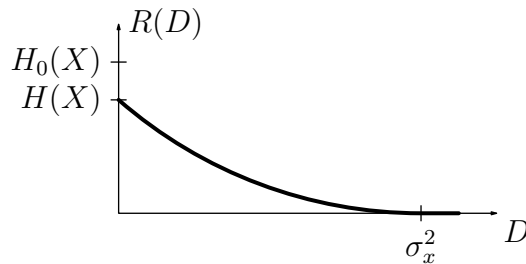


Abbildung 1.2: Rate-Distortion-Funktion einer diskreten Quelle.

Das Ergebnis der Rate-Distortion-Analyse einer Quelle ist die Rate-Distortion-Funktion $R(D)$, wie sie schematisch in Abbildung 1.2 dargestellt ist. Sie gibt die minimale Rate R an, die für die Codierung eines diskreten Quellensignals aufgewandt werden muß, wenn eine mittlere Verzerrung D nicht überschritten werden soll.

Die Redundanz ergibt sich dabei aus der Differenz zwischen der nötigen Rate für eine nicht quellencodierte Repräsentation $H_0(X)$ (z.B. reine PCM-Repräsentation) und der Entropierate $H(X)$ der Quelle. Es ist die maximal mögliche Einsparung, welche noch keine Verzerrung D erzeugt, d.h. eine verlustlose Codierung ermöglicht.

Jede darüber hinausgehende Komprimierung hat eine zunehmende Mindestverzerrung D zur Folge, welche nicht unterschritten werden kann. Wird als Verzerrungsmaß das objektive Kriterium der Leistung des Differenzsignals genommen, so ergibt sich für $R = 0$ im Falle einer wertdiskrete Quelle die Signalleistung σ_x^2 als Verzerrung.

1.1.1.4 Umsetzung der Quellencodierung

In der Nachrichtentechnik gibt es für die Umsetzung der Quellencodierung eine feste Vorgehensweise, welche durch die folgenden Schritte gekennzeichnet ist:

1. Eine Transformationscodierung oder Prädiktionscodierung, um im Sinne einer Redundanzreduktion statistische Bindungen zwischen den Datenwörtern zu beseitigen und um im Sinne einer Irrelevanzreduktion eine Abbildung auf signifikante und weniger signifikante Transformationskoeffizienten bzw. Wertebereiche des Prädiktionsfehlersignals zu erreichen.

2. Eine Quantisierung, d.h. eine Abbildung auf eine im Umfang festgelegte diskrete Menge von Repräsentationssymbolen (s. [JN90]), zur Konzentration der verfügbaren Übertragungsmedienressourcen (z.B. Bits/Zeiteinheit) auf die signifikanten Anteile der im vorherigen Schritt erzielten Informationsrepräsentation. Durch die Wahl der Genauigkeit der Repräsentation der Informationsanteile in Abhängigkeit von ihrer Signifikanz wird somit durch die Quantisierung eine Irrelevanzreduktion durchgeführt.
3. Eine Entropiecodierung, welche für die redundanz- und irrelevanzreduzierte Informationsrepräsentation die kompakteste Datenrepräsentation auf dem Kanalmedium (z.B. PCM-codierte Huffmancode-Symbole) findet.

Da im Rahmen dieser Arbeit ein Transformationscodierungssystem beschrieben wird, werden die Grundzüge eines solchen Systems in Folge dargelegt. Ausführliche Betrachtungen zu diesem Thema finden sich z.B. in [JN90].

1.1.1.5 Die Transformationscodierung

Ein generelles Transformationscodierungssystem ist unter Vernachlässigung der Kanalcodierung in Abbildung 1.3 dargestellt.

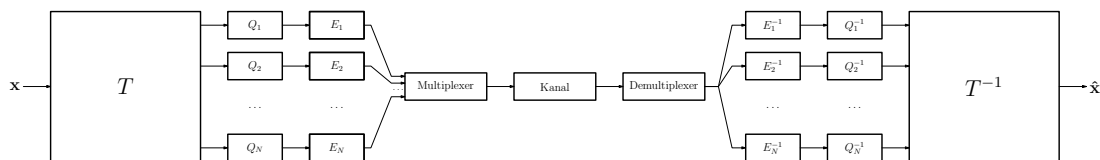


Abbildung 1.3: Schema eines generellen Transformationskodierungssystems.

Ein $N \times 1$ -Eingangsvektor \mathbf{x} wird durch eine lineare Transformation gemäß

$$\mathbf{y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} \quad (1.8)$$

zu einem $N \times 1$ -Vektor der Transformationskoeffizienten $\mathbf{y} = \{y_k\}, k \in [1, N]$ transformiert.

Anschließend wird jeder Transformationskoeffizient durch die Quantisierer Q_k separat quantisiert und anschließend durch die Entropiecodierer E_k entropiecodiert (s.u.). Die so erhaltene Informationsrepräsentation wird durch einen Multiplexer serialisiert und über den Kanal zum Empfänger gesendet.

Dieser kehrt die Schritte des Senders in umgekehrter Reihenfolge um; zuerst wird die serialisierte Darstellung wieder in einen Vektor der entropiecodierten und quantisierten Transformationskoeffizienten umgewandelt.

Die Vektorelemente werden nun jeweils invers entropiecodiert (E_k^{-1}) und durchlaufen die inverse Quantisierung (Q_k^{-1}). Der so erhaltene Vektor der quantisierten Transformationskoeffizienten $\hat{\mathbf{y}}$ wird mittels der inversen linearen Transformation

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{y}} \quad (1.9)$$

in den Rekonstruktionsdatenvektor $\hat{\mathbf{x}}$ transformiert.

Die durch eine Transformation erreichte Redundanzreduktion erschließt sich aus der Betrachtung der Entropie der Datenvektoren \mathbf{x} . Die mittlere Rate, die minimal zur Codierung der Informationen in den Datenvektoren \mathbf{x} aufgewendet werden muß, entspricht der Blockentropie bzw. dem Erwartungswert des Informationsgehalts dieses Datenvektoren (s. [JN90])

$$H_N(\mathbf{x}) = E \{I(\mathbf{x})\} \quad (1.10)$$

$$= (-1) \cdot \sum_{\forall k} P(\mathbf{x} = \mathbf{r}_k) \cdot \log_2 (P(\mathbf{x} = \mathbf{r}_k)) [Bit/Datensymbol], \quad (1.11)$$

wobei die \mathbf{r}_k die möglichen Realisierungen für den Datenvektor \mathbf{x} sind. Die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Realisierung ergibt sich aber bezogen auf die Vektorkomponenten zu

$$P(\mathbf{x} = \mathbf{r}_k) = P(x_1 = r_1^{(k)} \wedge x_2 = r_2^{(k)} \wedge \dots \wedge x_N = r_N^{(k)}) . \quad (1.12)$$

Nimmt man die Vektorkomponenten x_k als statistisch unabhängig an, so ergibt sich gemäß

$$P(A \wedge B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(B) \cdot P(A) \quad (1.13)$$

für den Fall, daß A und B statistisch unabhängig sind (es gilt dann $P(A|B) = P(A)$)

$$P(\mathbf{x} = \mathbf{r}_k) = \prod_{l=1}^N P(x_l = r_l^{(k)}) . \quad (1.14)$$

Setzt man diese Formulierung von $P(\mathbf{x} = \mathbf{r}_k)$ in Gleichung 1.11 ein, so erhält man

$$H_N(\mathbf{x}) = (-1) \cdot \sum_{\forall k} P(\mathbf{x} = \mathbf{r}_k) \cdot \log_2 \left(\prod_{l=1}^N P(x_l = r_l^{(k)}) \right) . \quad (1.15)$$

Mit der Rechenregel für das Produkt in einem Logarithmus

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b) \quad (1.16)$$

ergibt sich die Form

$$H_N(\mathbf{x}) = (-1) \cdot \sum_{\forall k} P(\mathbf{x} = \mathbf{r}_k) \cdot \sum_{l=1}^N \log_2 \left(P \left(x_l = r_l^{(k)} \right) \right). \quad (1.17)$$

Nach Vertauschung der Reihenfolge der Summationen ergibt sich daraus

$$H_N(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^N (-1) \cdot \sum_{\forall k} P \left(x_k = r_l^{(k)} \right) \cdot \log_2 \left(P \left(x_k = r_l^{(k)} \right) \right) \quad (1.18)$$

$$= \sum_{l=1}^N H(x_k). \quad (1.19)$$

Unter der Annahme, daß die Vektorelemente x_k also statistisch unabhängig sind, ist die Blockentropie, also die minimale Rate, mit der die Datenvektoren unter Beibehaltung ihres Informationsgehalts im Mittel codiert werden müssen, die Summe der Entropien der einzelnen Vektorelemente.

Da dies für natürliche Signale in der Regel nicht gilt (ansonsten wäre keine Redundanzreduktion nötig), muß die lineare Transformation \mathbf{T} den Datenvektor \mathbf{x} in einen Transformationskoeffizientenvektor \mathbf{y} überführen, für welchen die Annahme der statistischen Unabhängigkeit der Vektorkomponenten gilt - die Transformation muß die statistischen Bindungen im Eingangssignalvektor \mathbf{x} auflösen.

Wie eine Transformation eine solche Auflösung von statistischen Bindungen bewirken kann, soll unter der Beschränkung auf lineare statistische Bindungen (Korrelationen) gezeigt werden. Gefordert wird somit nur, daß das Maß der Korrelation, das zentrale Verbundmoment 1. Ordnung bzw. die Kovarianz

$$r_{y_k y_l} = E\{y_k \cdot y_l\} \stackrel{!}{=} \begin{cases} \sigma_{y_l}^2 & : k = l \\ 0 & : sonst \end{cases} \quad (1.20)$$

hier unter der Annahme mittelwertfreier Transformationskoeffizienten formuliert, zwischen verschiedenen Transformationskoeffizienten gleich 0 ist. Bezogen auf den gesamten Transformationskoeffizientenvektor \mathbf{y} lautet diese Forderung, daß die Korrelationsmatrix

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} = E\{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^H\} \stackrel{!}{=} \mathbf{D} \quad (1.21)$$

eine Diagonalmatrix \mathbf{D} der Transformationskoeffizientenvarianzen ist. Das Erfolgsmaß für das Wirken einer Transformation in diesem Sinne ist die Dekorrelationseffizienz (s. [AH92])

$$\eta_c = 1 - \frac{\sum_{k \neq l} \mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(k, l)}{\sum_{k \neq l} \mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(k, l)}. \quad (1.22)$$

Aus der Bildungsvorschrift der Korrelationsmatrix der Transformationskoeffizienten

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} = E \{ \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^H \} \stackrel{!}{=} \mathbf{D} \quad (1.23)$$

ergibt sich mit $\mathbf{y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}$

$$= E \{ \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{x})^H \} \quad (1.24)$$

$$= \mathbf{T} \cdot E \{ \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^H \} \cdot \mathbf{T}^H \quad (1.25)$$

$$= \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \cdot \mathbf{T}^H \stackrel{!}{=} \mathbf{D} . \quad (1.26)$$

Da $\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}$ als Autokorrelationsmatrix symmetrisch ist,

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^H = (E \{ \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^H \})^H \quad (1.27)$$

$$= E \{ (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^H)^H \} = E \{ (\mathbf{x}^H)^H \cdot \mathbf{x}^H \} \quad (1.28)$$

$$= \mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} , \quad (1.29)$$

läßt sie sich (s. [Bar04]) in der Hauptdiagonalform auch als

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{E}^H \quad (1.30)$$

schreiben, wobei die Spaltenvektoren der in diesem Fall orthonormalen Matrix \mathbf{E} die Eigenvektoren von $\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}$ sind (s. [Shl05] bzw. [Jol02]) und die Diagonalelemente von $\mathbf{\Lambda}$ die zugehörigen Eigenwerte. Diese Hauptdiagonalform läßt sich unter Ausnutzung der Eigenschaft orthonormaler Transformationen, daß die inverse Transformation gleich der hermiteschen Matrix ist ($\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}^H$, s. Beweis A.2.1), auch in der Form

$$\mathbf{E}^H \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E}^H \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{E}^H \cdot \mathbf{E} \quad (1.31)$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}^H \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{\Lambda} . \quad (1.32)$$

schreiben. Aus dem Vergleich mit

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} = E \{ \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^H \} = E \{ \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{x})^H \} \quad (1.33)$$

$$= \mathbf{T} \cdot E \{ \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^H \} \cdot \mathbf{T}^H \quad (1.34)$$

$$= \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \cdot \mathbf{T}^H \quad (1.35)$$

ergibt sich die Transformationsmatrix \mathbf{T} , welche $\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}$ diagonalisiert, als Matrix, deren Zeilenvektoren die Eigenvektoren von $\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}$ sind.

$$\mathbf{T}_{KLT} = \mathbf{E}_{\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}}^H . \quad (1.36)$$

Diese optimal dekorrelierende Transformation ist die Karhunen-Loewe-Transformation, kurz KLT genannt ([JN90]).

Für die Korrelationsmatrix der Transformationskoeffizienten gilt dann

$$\mathbf{R}_{yy} = \begin{pmatrix} \sigma_{y_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{y_2}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{y_N}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_N \end{pmatrix}, \quad (1.37)$$

d.h. die Varianzen der Transformationskoeffizienten sind dann die Eigenwerte von \mathbf{R}_{xx} .

Dies kann für AR(1)-modellierte Daten (s. 1.3.1) im \mathbb{R}^2 auch einfach gezeigt werden. Die Quellenkorrelationsmatrix ergibt sich für diesen Fall zu

$$\mathbf{R}_{xx} = \sigma_x^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \varrho \\ \varrho & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

Die Eigenwerte ergeben sich aus dem Ansatz

$$\det(\mathbf{R}_{xx} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = \det \left(\begin{pmatrix} \sigma_x^2 - \lambda & \sigma_x^2 \cdot \varrho \\ \sigma_x^2 \cdot \varrho & \sigma_x^2 - \lambda \end{pmatrix} \right) \stackrel{!}{=} 0, \quad (1.39)$$

welcher über die quadratische Gleichung

$$(\sigma_x^2 - \lambda)^2 - \sigma_x^4 \cdot \varrho^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (1.40)$$

zu den Eigenwerten

$$\lambda_{0/1} = \sigma_x^2 \cdot (1 \pm |\varrho|) \quad (1.41)$$

führen. Die zugehörigen Eigenvektoren ergeben sich aus der Auflösung des Gleichungssystems

$$(\mathbf{R}_{xx} - \lambda_{0/1} \cdot \mathbf{I}) \cdot \varphi_{0/1} \stackrel{!}{=} 0 \quad (1.42)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^2 - \sigma_x^2 \cdot (1 \pm |\varrho|) & \varrho \cdot \sigma_x^2 \\ \varrho \cdot \sigma_x^2 & \sigma_x^2 - \sigma_x^2 \cdot (1 \pm |\varrho|) \end{pmatrix} \cdot \varphi_{0/1} \stackrel{!}{=} 0 \quad (1.43)$$

$$\begin{pmatrix} \mp \sigma_x^2 \cdot |\varrho| & \varrho \cdot \sigma_x^2 \\ \varrho \cdot \sigma_x^2 & \mp \sigma_x^2 \cdot |\varrho| \end{pmatrix} \cdot \varphi_{0/1} \stackrel{!}{=} 0. \quad (1.44)$$

Unter der Annahme $\varrho \geq 0$ ergeben sich nach Normierung die Eigenvektoren

$$\lambda_0 = \sigma_x^2 \cdot (1 + \varrho) \Rightarrow \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \sigma_x^2 \cdot (1 - \varrho) \Rightarrow \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

woraus sich die für den gegebenen Fall feste KLT-Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_{KLT} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

ableiten läßt. Mit Gleichung 1.34 und der Quellenkorrelationsmatrix gemäß Gleichung 1.38 ergibt sich

$$\mathbf{R}_{yy} = \mathbf{T}_{KLT} \cdot \mathbf{R}_{xx} \cdot \mathbf{T}_{KLT}^H \quad (1.46)$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_x^2 \cdot (1 + \varrho) & 0 \\ 0 & \sigma_x^2 \cdot (1 - \varrho) \end{pmatrix}, \quad (1.47)$$

welche der Diagonalmatrix der Eigenwerte entspricht.

Aus dieser Korrelationsmatrix der Transformationskoeffizienten kann schon auf die Eignung der KLT zur Irrelevanzreduktion geschlossen werden, da bei der Transformation zweier Eingangswerte mit der selben Varianz/Leistung¹ σ_x^2 zwei Transformationskoeffizienten mit unterschiedlicher Leistungen, $\sigma_{y_0}^2 = \sigma_x^2 \cdot (1 + \varrho)$ und $\sigma_{y_1}^2 = \sigma_x^2 \cdot (1 - \varrho)$, und damit unterschiedlicher Signifikanz entstehen.

Diese unterschiedliche Signifikanz bleibt auch bei der inversen Transformation erhalten, da orthonormale Transformationen energiebewahrend sind (s. Beweis A.2.2). Zu beachten ist auch, daß der Unterschied in der Signifikanz zwischen den Transformationskoeffizienten mit zunehmender Korrelation der Quelle zunimmt.

Wird als Signifikanzkriterium der Transformationskoeffizienten die Leistung genommen, so kann als Maß für die Fähigkeit der Transformation zur Vorbereitung einer Irrelevanzreduktion die Energiepackungsdichte

$$\eta_{EP}(M) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} \sigma_{y_k}^2}{\sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{y_k}^2} = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} \mathbf{R}_{yy}(k, k)}{\sum_{k=0}^N \mathbf{R}_{yy}(k, k)} \quad (1.48)$$

verwendet werden. Sie gibt an, welcher Anteil an der Gesamtenergie schon in den ersten $M < N$ Transformationskoeffizienten enthalten ist. Zum Verständnis von Gleichung 1.48 sei auf den Beweis A.2.2 und den Zusammenhang

$$\text{spur}(\mathbf{R}_{xx}) = \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{x_k}^2 \quad (1.49)$$

$$= N \cdot \sigma_x^2 = E\{\mathbf{x}^H \cdot \mathbf{x}\} \quad (1.50)$$

¹Stillschweigend werden mittelwertfreie Signale angenommen

hingewiesen.

Auch für dieses Leistungskriterium kann die Optimalität der KLT bewiesen werden.

Gesucht wird eine Transformationsmatrix $\mathbf{T} = \{\varphi_k\}$ mit den Basisvektoren φ_k , welche die maximale Energiepackungsdichte erreicht, d.h. welche den Ausdruck

$$F\left(\{\varphi_k\}_{k \in [0, M-1]}\right) = \sum_{k=0}^M \sigma_{y_k}^2 = \sum_{k=0}^M \mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(k, k) \quad (1.51)$$

maximiert. Die Diagonalelemente von $\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}$ berechnen sich gemäß Gleichung 1.26 zu

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(k, k) = \varphi_k \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \cdot \varphi_k^H. \quad (1.52)$$

Um Trivialsösungen $|\varphi_k| \rightarrow \infty$ auszuschließen, ist zusätzlich jeweils die Restriktion

$$|\varphi_k|^2 = \varphi_k \cdot \varphi_k^H \stackrel{!}{=} 1 \quad (1.53)$$

notwendig.

Die Lösung für das Extremalwertproblem kann mit Hilfe der Lagrangschen Multiplikatormethode als Lösung des Gleichungssystems

$$\text{grad}\left(F\left(\{\varphi_k\}_{k \in [0, M-1]}\right)\right) + \lambda \cdot \text{grad}\left(\mathbf{h}\left(\{\varphi_k\}_{k \in [0, M-1]}\right)\right) \stackrel{!}{=} \mathbf{0}. \quad (1.54)$$

berechnet werden, wobei

$$\mathbf{h}\left(\{\varphi_k\}_{k \in [0, M-1]}\right) = \{1 - \varphi_k \cdot \varphi_k^H\}_{k \in [0, M-1]} \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad (1.55)$$

die Einbringung der in Gleichung 1.53 angegebenen Restriktion ist.

Die einzelnen Komponenten des Gradientenvektors ergeben sich zu

$$\frac{\delta \varphi_k \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \cdot \varphi_k^H}{\delta \varphi_k} + \lambda_k \cdot \frac{\delta (1 - \varphi_k \cdot \varphi_k^H)}{\delta \varphi_k} \stackrel{!}{=} 0 \quad (1.56)$$

$$2 \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \cdot \varphi_k^H - \lambda_k \cdot 2 \cdot \varphi_k^H \stackrel{!}{=} 0 \quad (1.57)$$

$$\Rightarrow \mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \cdot \varphi_k^H = \lambda_k \cdot \varphi_k^H. \quad (1.58)$$

Damit ergibt sich das gleiche Eigenwertproblem wie in der vorherigen Ableitung, d.h. die Zeilenvektoren der Transformationsmatrix ergeben sich als Eigenvektoren der Quellenkorrelationsmatrix $\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}$.

Mit der Betrachtung der KLT als Hauptachsentransformation, im Englischen auch PCA² genannt, ergibt sich eine anschauliche Darstellung ihres Prinzips. Die Hauptachsendarstellung der Quellenkorrelationsmatrix

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{E}^H \quad (1.59)$$

$$= \mathbf{T}_{KLT}^{-1} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \cdot \mathbf{T}_{KLT} \quad (1.60)$$

läßt sich als lineare Transformation der Korrelationsmatrix $\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}$ auf eine neue orthonormale Basis interpretieren.

Für das obige Beispiel der 2×2 -Transformation eines AR(1)-Signals ergibt sich

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = \left(\begin{pmatrix} \varphi_{00} \\ \varphi_{01} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{10} \\ \varphi_{11} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{y_0}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{y_1}^2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \varphi_{00} & \varphi_{01} \\ \varphi_{10} & \varphi_{11} \end{pmatrix} \right) \quad (1.61)$$

$$= \mathbf{T}_{KLT}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{y_0}^2 \cdot \varphi_{00} & \sigma_{y_0}^2 \cdot \varphi_{01} \\ \sigma_{y_1}^2 \cdot \varphi_{10} & \sigma_{y_1}^2 \cdot \varphi_{11} \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

$$= \mathbf{T}_{KLT}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{y_0}^2 \cdot \varphi_0 \\ \sigma_{y_1}^2 \cdot \varphi_1 \end{pmatrix}. \quad (1.63)$$

Anschaulich gesehen werden die Varianzen $\sigma_{y_0/1}^2$ auf die orthonormale Basis (φ_0, φ_1) angetragen und anschließend über die inverse Transformationsmatrix auf die euklidische Basis $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1)$ zurücktransformiert (s. Abbildung 1.4).

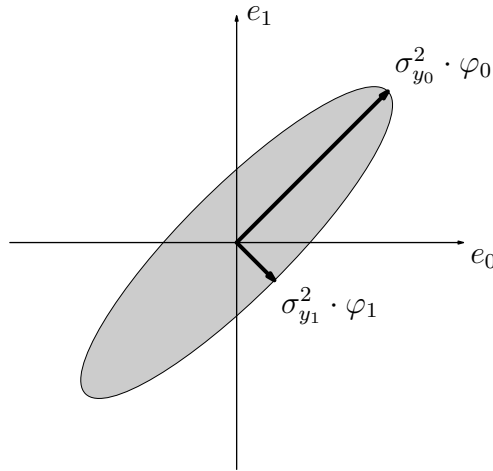


Abbildung 1.4: Interpretation der KLT als Hauptachsentransformation.

Die gewichteten Basisvektoren $(\sigma_{y_0}^2 \cdot \varphi_0, \sigma_{y_1}^2 \cdot \varphi_1)$ spannen eine Ellipse auf, welche die Verbund-Amplitudendichteverteilung des Eingangssignalvektors \mathbf{x} im \mathfrak{R}^N umschließt. Dies wird durch Abbildung 1.5 veranschaulicht, welche die Verbund-Amplitudendichteverteilung durch die Besetzungsdichte eines Scatterplots approximiert. Die Ellipse ist besonders für gaußverteilte Transformationskoeffizienten eine gute Approximierung der Verbund-ADV.

²Principal Component Analysis, s. [Shl05], [Jol02]

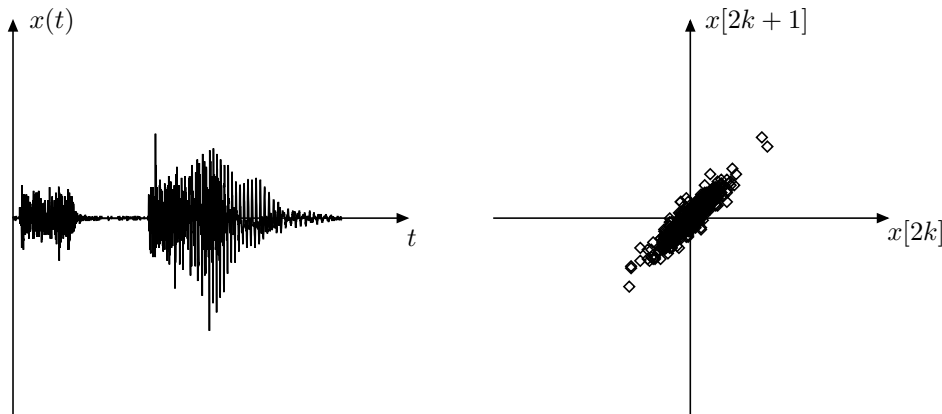


Abbildung 1.5: Links: Audiosignal, rechts: Wertepaardarstellung benachbarter Werte.

In der Sichtweise der PCA stellt die inverse Transformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{y} \quad (1.64)$$

einen Mischprozeß von gewichteten unkorrelierten Prozessen $y_0[n]$ und $y_1[n]$ über eine orthonormale Mischmatrix \mathbf{T}^{-1} dar. Im Gegensatz zur auf die Kodierung ausgerichteten Anwendung als KLT stehen dabei die Prozesse $y_0[n]$ und $y_1[n]$ als prinzipielle Komponenten von beobachteten Überlagerung im Vordergrund, weniger ihre für die Kodierung wichtigen statistischen Eigenschaften.

Die gedankliche Übertragung der Basis aus Abbildung 1.4 auf das Scatterplot in Abbildung 1.5 zeigt, daß durch die Transformation aus zwei gleichsignifikanten Eingangswerten $x[2k] = x_0$ und $x[2k+1] = x_1$ zwei in ihrer Leistung unterschiedlich signifikante Transformationskoeffizienten y_0 und y_1 entstehen, wobei die Basis (φ_0, φ_1) den grundlegenden statistischen Zusammenhang zwischen x_0 und x_1 widerspiegelt.

1.1.1.6 Optimale Bitzuteilung bei der Transformationscodierung

Die wichtigste Frage bei der Irrelevanzreduktion ist die Frage nach der optimalen Verteilung der zur Verfügung stehenden Übertragungsrate R auf die einzelnen Transformationskoeffizienten. Genauer gesagt geht es um die Frage, wie die zur Verfügung stehende Gesamtbitrate R auf die einzelnen Quantisierer aus Abbildung 1.3 aufgeteilt wird, wenn die Gesamtverzerrung minimal sein soll.

Die Gesamtverzerrung als Varianz des Differenzsignals, bezogen auf einen der N transformierten Eingangskoeffizienten, ergibt sich zu

$$\sigma_d^2 = \frac{1}{N} \cdot E\{|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}|^2\}. \quad (1.65)$$

Dabei ist $\hat{\mathbf{x}}$ der invers transformierte quantisierte Transformationskoeffizientenvektor

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{y}_q. \quad (1.66)$$

Bei hinreichend feiner Quantisierung kann die Quantisierung als Addition eines Rauschvektors \mathbf{q} beschrieben werden (s. [JN90])

$$\mathbf{y}_q = \mathbf{y} + \mathbf{q}. \quad (1.67)$$

Somit ergibt sich der Rekonstruktionsvektor zu

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{q}) \quad (1.68)$$

$$= \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{q} \quad (1.69)$$

$$= \mathbf{x} + \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{q}. \quad (1.70)$$

Für die Gesamtverzerrung ergibt sich somit

$$\sigma_d^2 = \frac{1}{N} \cdot E\{|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}|^2\} \quad (1.71)$$

$$= \frac{1}{N} \cdot E\{|\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{q}|^2\} \quad (1.72)$$

$$= \frac{1}{N} \cdot E\left\{(\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{q})^H \cdot (\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{q})\right\} \quad (1.73)$$

$$= \frac{1}{N} \cdot E\left\{\mathbf{q}^H \cdot (\mathbf{T}^{-1})^H \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{q}\right\}. \quad (1.74)$$

Unter der Annahme einer orthonormalen Transformation gilt mit Beweis A.2.1 $(\mathbf{T}^{-1})^H = \mathbf{T}$, so daß sich die obige Gleichung zu

$$= \frac{1}{N} \cdot E\{\mathbf{q}^H \cdot \mathbf{q}\} \quad (1.75)$$

$$\Rightarrow \sigma_d^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{q_k}^2 \quad (1.76)$$

umformen läßt.

Die Gesamtverzerrung ist unter den gegebenen Annahmen (hinreichend feine Quantisierung, orthonormale Transformation) gleich der Summe der Varianzen der Quantisierungsfehler der einzelnen Transformationskoeffizienten.

Werden die einzelnen Transformationskoeffizienten y_k als gedächtnislose, gaußverteilte³ Signale angenommen, so ergibt sich nach der Rate-Distortion-Theorie für

³s. [PN08d], [Ash72]

dieses Quellenmodell (s. [JN90]) folgende Minimalverzerrung bei der Codierung mit R_k Bits/Abtastwert:

$$\sigma_{q_k}^2 = \sigma_{y_k}^2 \cdot \epsilon^* \cdot 2^{-2R_k}. \quad (1.77)$$

Damit läßt sich das Problem der Minimierung der Gesamtverzerrung als

$$\sigma_d^2(\{R_k\}) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{y_k}^2 \cdot \epsilon^* \cdot 2^{-2R_k} \quad (1.78)$$

schreiben, wobei als Randbedingung

$$R = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} R_k \Rightarrow R - \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} R_k = 0 \quad (1.79)$$

eingehalten werden muß.

Die Lösung dieses Extremalwertproblems mittels der Lagrangschen Multiplikatormethode

$$\text{grad}(\sigma_d^2(\{R_k\})) + \lambda \cdot \text{grad}\left(R - \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} R_k = 0\right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (1.80)$$

führt zu einem Gleichungssystem, dessen Lösung

$$R_k = R + \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{\sigma_{y_k}^2}{\sqrt[N]{\prod_{l=0}^{N-1} \sigma_{y_l}^2}} \right) \quad (1.81)$$

ist.

Ein interessanter Aspekt dieser Lösung ist, daß bei dieser Bitzuteilung das Fehlerspektrum

$$\sigma_{q_k}^2 = \sigma_{y_k}^2 \cdot \epsilon^* \cdot 2^{-2 \cdot \left(R + \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{\sigma_{y_k}^2}{\sqrt[N]{\prod_{l=0}^{N-1} \sigma_{y_l}^2}} \right) \right)} \quad (1.82)$$

$$= \sigma_{y_k}^2 \cdot \epsilon^* \cdot 2^{-2R} \cdot \frac{\sqrt[N]{\prod_{l=0}^{N-1} \sigma_{y_l}^2}}{\sigma_{y_k}^2} \quad (1.83)$$

$$= \epsilon^* \cdot 2^{-2R} \cdot \sqrt[N]{\prod_{l=0}^{N-1} \sigma_{y_l}^2} \quad (1.84)$$

weiß ist, d.h. alle Quantisiererfehlervarianzen haben den gleichen Wert. Dies kann allerdings nur dann gelten, solange $\min\{\sigma_{y_k}^2\}$ größer ist als dieser Wert, da die Leistung des Quantisierungsfehlers nicht größer sein kann als die Leistung des quantisierten Werts.

1.1.1.7 Der Transformationsgewinn

Eine wichtiges Qualitätsmaß für die Beurteilung einer Transformation hinsichtlich ihrer Eignung zur Quellencodierung ist der Transformationsgewinn. Er stellt das Verhältnis zwischen der erreichten Verzerrung ohne Transformation, $\sigma_{d,PCM}^2$, zur erreichten Verzerrung mit Transformation, $\sigma_{d,TC}^2$, bei gleicher mittleren Rate dar

$$G_{TC} = \frac{\sigma_{d,PCM}^2}{\sigma_{d,TC}^2} . \quad (1.85)$$

Diese Analyse wird für gaußverteilte Eingangsdaten vorgenommen, da diese nach der Rate-Distortion-Theorie (s. [JN90]) die schlechtesten aller möglichen Resultate liefern. Somit kann eine Abschätzung nach unten vorgenommen werden.

Für nichtcodierte gaußverteilte Eingangsdaten liefert die Rate-Distortion-Theorie (s.o.) bei gegebener mittleren Rate R pro Koeffizient folgende minimale Verzerrung:

$$\sigma_{d,PCM}^2 = \sigma_x^2 \cdot \epsilon^* \cdot 2^{-2R} . \quad (1.86)$$

Unter Beschränkung auf orthonormale Transformationen kann die Varianz σ_x^2 auch als (s.o.)

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{y_k}^2 \quad (1.87)$$

ausgedrückt werden. Damit ergibt sich als Verzerrung im nichtcodierten Fall (reine PCM)

$$\sigma_{d,PCM}^2 = \epsilon^* \cdot 2^{-2R} \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{y_k}^2 . \quad (1.88)$$

Für die Transformationscodierung ergibt sich die Verzerrung gemäß Gleichung 1.76 zu

$$\sigma_{d,TC}^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{q_k}^2 . \quad (1.89)$$

Die Varianzen $\sigma_{q_k}^2$ wurden bei optimaler Bitzuweisung schon in Gleichung 1.84 zu

$$\sigma_{q_k}^2 = \epsilon^* \cdot 2^{-2R} \cdot \sqrt[N]{\prod_{l=0}^{N-1} \sigma_{y_l}^2} \quad (1.90)$$

hergeleitet. Somit ergibt sich die Gesamtverzerrung zu

$$\sigma_{d,TC}^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \epsilon^* \cdot 2^{-2R} \cdot \sqrt[N]{\prod_{l=0}^{N-1} \sigma_{y_l}^2} \quad (1.91)$$

$$= \epsilon^* \cdot 2^{-2R} \cdot \sqrt[N]{\prod_{l=0}^{N-1} \sigma_{y_l}^2}. \quad (1.92)$$

Der Transformationsgewinn ergibt sich somit zu

$$G_{TC} = \frac{\epsilon^* \cdot 2^{-2R} \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{y_k}^2}{\epsilon^* \cdot 2^{-2R} \cdot \sqrt[N]{\prod_{l=0}^{N-1} \sigma_{y_l}^2}} \quad (1.93)$$

$$= \frac{\frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{y_k}^2}{\sqrt[N]{\prod_{l=0}^{N-1} \sigma_{y_l}^2}} \quad (1.94)$$

und damit als Verhältnis des geometrischen zum arithmetischen Mittelwertes der Transformationskoeffizientenvarianzen $\sigma_{y_k}^2$.

Die praktische Aussage des Transformationsgewinns kann in zwei verschiedenen Formen formuliert werden. Zum einen verbessert sich durch den Einsatz der Transformationscodierung bei gleicher mittleren Rate R der SNR_{dB} von seinem Wert bei reiner PCM-Codierung ohne Transformation

$$SNR_{dB,PCM} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_{d,PCM}^2} \right) \quad (1.95)$$

auf den Wert

$$SNR_{dB,TC} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_{d,TC}^2} \right), \quad (1.96)$$

bei Verwendung der Transformation, was sich mit

$$G_{TC} = \frac{\sigma_{d,PCM}^2}{\sigma_{d,TC}^2} \Rightarrow \sigma_{d,TC}^2 = \frac{\sigma_{d,PCM}^2}{G_{TC}} \quad (1.97)$$

zu

$$SNR_{dB,TC} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2 \cdot G_{TC}}{\sigma_{d,PCM}^2} \right) \quad (1.98)$$

$$= 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_{d,PCM}^2} \right) + 10 \cdot \log_{10} (G_{TC}) \quad (1.99)$$

$$\Rightarrow SNR_{dB,TC} = SNR_{dB,PCM} + 10 \cdot \log_{10} (G_{TC}) \quad (1.100)$$

entwickelt, d.h. der SNR_{dB} verbessert sich bei gleicher mittleren Rate um $10 \cdot \log_{10} (G_{TC})$ dB.

Das PCM-System müßte zur Erzielung der geringeren Verzerrung $\sigma_{d,TC}^2$ eine höhere Rate R' aufwenden, so daß

$$\sigma_{d,TC}^2 = \frac{\sigma_{d,PCM}^2}{G_{TC}} \stackrel{!}{=} \sigma_{d,PCM'}^2 = \sigma_x^2 \cdot \epsilon^* \cdot 2^{-2R'} \quad (1.101)$$

gilt. Die weitere Auflösung ergibt, daß

$$\frac{\sigma_{d,PCM}^2}{G_{TC}} = \frac{\sigma_x^2 \cdot \epsilon^* \cdot 2^{-2R}}{G_{TC}} = \sigma_x^2 \cdot \epsilon^* \cdot 2^{-2R'} \quad (1.102)$$

gelten muß, was sich zu

$$\frac{2^{-2R}}{G_{TC}} = 2^{-2R'} - 2R - \log_2 (G_{TC}) = -2R' \quad (1.103)$$

und damit zu

$$R' - R = \frac{1}{2} \cdot \log_2 (G_{TC}) \quad (1.104)$$

reduziert. Bei gleicher Verzerrung kann also durch den Einsatz der Transformationscodierung die Rate um $\frac{1}{2} \cdot \log_2 (G_{TC})$ verringert werden.

Es läßt sich zeigen (s. [JN90]), daß der maximale Transformationsgewinn für eine optimale Prädiktion der Transformationsgröße $N \rightarrow \infty$ sich durch Übergang der Summation zur Integration zu

$$\max \{G_{TC}\} = \gamma^{-2} \quad (1.105)$$

als Kehrwert des Maßes spektraler Konstanz

$$\gamma^2 = \frac{2^{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log_2(S_{yy}(j\Omega)) d\Omega}}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log_2(S_{yy}(j\Omega)) d\Omega} \quad (1.106)$$

ergibt. Je flacher und gleichmäßiger das Frequenzspektrum, um so weniger ist die Spektraldarstellung als kompakte Signalrepräsentation zu gebrauchen.

1.1.2 Die Kanalcodierung

Die Aufgabe der Kanalcodierung liegt in der Absicherung der Übertragung gegen Fehler. Dies setzt voraus, daß Fehler als solche überhaupt erkannt werden können, d.h. es muß zwischen korrekten und nicht korrekten Übertragungen maschinell unterschieden werden können.

Dies ist nicht der Fall, wenn die Menge der über den Kanal übertragenen Codes $\{c_k\}$ nur zulässige Codewörter $\{i_k\}$ beinhaltet, da dann jede Verfälschung wieder in einem zulässigen Codewort resultiert.

Eine Verfälschung kann nur dann korrigiert werden, wenn sie zu unzulässigen Codewörtern $\{r_k\}$ führt, deren Empfang als Fehler erkannt wird. Der Fehler kann dann durch Korrektur auf das nächstgelegene zulässige Codewort $\{i_k\}$ korrigiert werden (Beispiel: Hamming-Code).

Aus Sicht der Informationsübertragung ist die Erweiterung der Menge der Kanalwörter $\{c_k\}$ um die Menge $\{r_k\}$ völlig redundant, da die Elemente aus $\{r_k\}$ ja nicht zur Informationscodierung verwendet werden. Empfangene Elemente aus $\{r_k\}$ sind aber von den Informationswörtern statistisch abhängig, da sie ja als deren Verfälschung auftreten.

Das Prinzip der Kanalcodierung besteht also darin, der zu übertragenden Informationsrepräsentation wieder Redundanz hinzuzufügen, allerdings maschinenlesbare Redundanz, die zur Fehlererkennung/Korrektur verwendet werden kann.

Somit sind Quellen- und Kanalcodierung in ihrer Wirkung Gegenspieler, da die Quellencodierung Signalredundanz entfernt, während die Kanalcodierung maschinenverwendbare Redundanz hinzufügt.

Somit kann in der Gesamtwirkung nur ein Kompromiß zwischen den Zielen der Quellencodierung (Kompression) und der Kanalcodierung (Fehlerschutz) geschlossen werden; will man eine hohe Kompression erreichen, dann darf die Kanalcodierung nicht allzu viel Redundanz hinzufügen. Will man einen hohen Fehlerschutz, wird die Kompression durch die zugefügte Redundanz schwächer.

Wünschenswert ist ein flexibler Kompromiß, der sich auf die jeweiligen Gegebenheiten einstellt. Bei gutem Kanalverhältnissen können so die Anforderung an die Kanalcodierung zugunsten einer besseren Kompression reduziert werden, bei schlechten Kanalverhältnissen opfert man Kompressionsrate zugunsten eines besseren Fehlerschutzes.

Diese Flexibilität bietet die traditionelle Verkettung von Kanal- und Quellencodierung nur im schwachem Maße. Einer möglichst optimalen Quellencodierung wird ein Kanalcodierer nachgeschaltet, welcher auf die mittleren Gegebenheiten ausgelegt ist bzw. z.B. durch Punktieren des Kanalcodes einige diskrete Redundanzraten bei der Kanalcodierung ermöglicht.

Der im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Ansatz ermöglicht stufenlose Kompromisse zwischen der Quellen- und Kanalcodierung, so daß er sich vor allem für in ihrer Qualität sehr dynamische Kanäle (Drahtlosübertragung, Internetübertragung) eignet.

Dieser Kompromiß wird durch die Verschmelzung der Quellen- und Kanalcodierung zu einem *joint source channel coder* erreicht, der auf der Grundidee des *multiple description codings* aufbaut.

1.2 Multiple Description Coding

Der verallgemeinerte Grundansatz des *Multiple Description Codings* besteht (s. [Goy01a]) darin, die Verteilung der Informationen eines Signals so auf eine Menge $\Omega = \{y_k\}$ von Repräsentationen zu verteilen, daß folgende, in der Praxis konträre, Bedingungen erfüllt sind:

1. Eine möglichst geringe Verzerrung $D_\Omega(R)$ bei der Rekonstruktion aus allen empfangenen Repräsentationen y_k (*Central Distortion*).
2. Eine möglichst geringe Verzerrung $D_S(R)$ bei der Rekonstruktion aus einer Untermenge $S \in \Omega$ von Repräsentationen y_k (*Side Distortion*).

Diese Anforderungen sind deshalb konträr, da eine gute Rekonstruktion aus einer Untermenge $S \in \Omega$ von Beschreibungen nur dann gelingen kann, wenn die Informationen der fehlenden Koeffizienten $\{y_k \mid y_k \in (\Omega - S)\}$ aus den empfangenen Koeffizienten ersetzt werden können. Diese müssen demnach auch redundante Informationsanteile repräsentieren.

Diese Redundanz widerspricht aber dem Ziel einer möglichst geringen *central distortion*, da dann bei gleicher Verzerrung D die Rate R erhöht wird. Dies ist der klassische Gegensatz von Kanal- und Quellencodierung. Während die Quellencodierung zur Datenkompression Redundanzen und Irrelevanzen entfernt, setzt die

Kanalcodierung zur Erhöhung der Fehlerrobustheit wieder (maschinenlesbare) Redundanzen in Form von Fehlerschutzbits zu.

Dieser Konflikt kann nicht generell aufgelöst werden. Die optimal möglichste Lösung besteht darin, die zusätzliche Redundanz für den Fehlerschutz an die aktuelle Übertragungsqualität anzupassen. Dies ist gerade für Internet- und Mobilfunkkanäle wichtig, da dort die Übertragungsqualität je nach Netzauslastung oder Qualität der Funkübertragung stark variieren kann.

Der klassische Ansatz, die Kaskadierung von Quellencodierung zur Entfernung von Signalredundanzen und anschließender Kanalcodierung zur Hinzufügung von maschinenlesbarer Fehlerschutzredundanz, ist in solchen Fällen überfordert. Klassische Verfahren der Kanalcodierung, wie Hammingcodes oder Faltungscodierer [Tan89],[PR], bieten nur wenige mögliche Redundanzraten an, die sich zudem technisch schwer umschalten lassen (evtl. durch Bereithaltung mehrerer Kanalcodierer, welche je nach Bedarf ausgewählt werden).

Im Rahmen dieser Arbeit soll ein Ansatz vorgeschlagen werden, der im Sinne eines *joint source channel coders* (s. [LNA98]) die Quellen- und Kanalcodierung in einer Transformation so vereint, daß die Redundanz und damit der Kompromiß zwischen Kompression und Fehlerschutz stufenlos und unkompliziert eingestellt werden kann. Die Transformation in eine den obigen Ansprüchen genügenden Repräsentation wird dabei durch eine lineare Transformation bewirkt, deren Transformationskoeffizienten unabhängig codiert und übertragen werden (s. Abbildung 1.6).

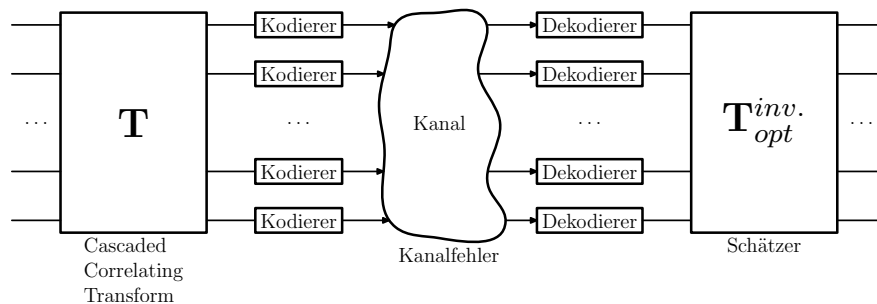


Abbildung 1.6: Der verallgemeinerte *Multiple Description Coding*-Ansatz

Der entscheidende Ansatz ist dabei, eine Transformation in ihrer (De)korrelationsfähigkeit variieren zu können und dies mit einem Schätzer als Kanalcodierungslösung zu verbinden, welche im Gegensatz zu klassischen Verfahren direkt auf der Signalkorrelation arbeitet.

Aus der Sicht der klassischen Transformation wird somit nur die Transformation und die inverse Transformation ausgetauscht, womit sich die erarbeitete Lösung leicht in bestehende transformationscodierungsbasierende Lösungen integrieren läßt.

1.3 Quellenmodellierung.

Für die folgende Herleitung und Evaluierung des im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Kodierverfahrens ist es notwendig, auch die zu kodierenden Bilddaten mathematisch zu modellieren.

Ziel der Modellierung ist ein mathematisches Quellenmodell, dessen Ausgangssignal den realen Bildsignalen möglichst ähnliche statistische Eigenschaften aufweist, ohne eine allzu hohe mathematische Komplexität zu haben.

Für Bilddaten bietet sich nach [Cla86] das je nach Bildtyp separierbare oder isometrische AR(1)-Modell an. Bevor diese abgeleiteten Quellenmodelle beschrieben werden, soll zunächst das zugrundeliegende eindimensionale AR(1)-Modell gemäß [Hän97], [Hay96] und [Kay97] beschrieben werden.

1.3.1 Das eindimensionale AR(1)-Modell

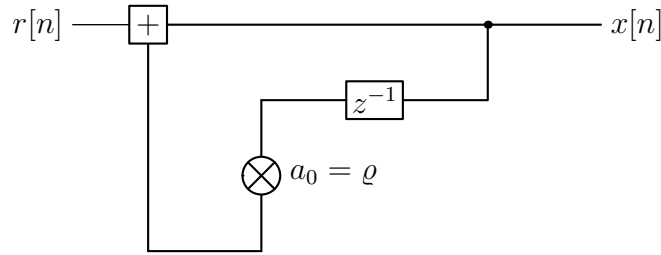


Abbildung 1.7: Realisierung einer AR(1)-Modellquelle.

Eine eindimensionale AR(1)-Quelle ist eine autoregressive Quelle erster Ordnung, d.h. weißes Rauschen $r[n]$ wird durch ein IIR-Filter erster Ordnung gefiltert (s. Abbildung 1.7).

Das Ausgangssignal berechnet sich somit zu

$$x[n] = r[n] + \rho \cdot x[n-1]. \quad (1.107)$$

Für die Autokorrelation

$$r_{xx}[k] = E \{x[n] \cdot x[n+k]\} \quad (1.108)$$

ergibt sich mit Gleichung 1.107

$$= E \{x[n] \cdot (r[n+k] + x[n+k-1])\} \quad (1.109)$$

$$= \underbrace{E \{x[n] \cdot r[n+k]\}}_{=0} + \rho \cdot E \{x[n] \cdot x[n+k-1]\} \quad (1.110)$$

$$\Rightarrow r_{xx}[k] = \rho \cdot r_{xx}[k-1]. \quad (1.111)$$

Aus dieser rekursiven Definition ergibt sich mit $r_{xx}[0] = \sigma_x^2$

$$r_{xx}[k] = \sigma_x^2 \cdot \varrho^{|k|} \quad (1.112)$$

und damit eine Korrelationsmatrix

$$\mathbf{R}_{xx}(m, n) = \varrho^{|m-n|}. \quad (1.113)$$

Der Filterkoeffizient ϱ ist damit gleich dem normierten Korrelationsfaktor $r_{xx}[1]/r_{xx}[0]$. Für die Varianz der Quelle ergibt sich

$$\sigma_x^2 = E \{x^2[n]\} \quad (1.114)$$

$$= E \{(r[n] + \varrho \cdot x[n-1])^2\} \quad (1.115)$$

woraus sich nach Ausmultiplizieren und Ausnutzung der absoluten Orthogonalität weißen Rauschens zu allen anderen Signalen

$$= E \{r[n]^2\} + \underbrace{E \{2 \cdot \varrho \cdot r[n] \cdot x[n-1]\}}_{=0} + \varrho^2 \cdot E \{x[n-1]^2\} \quad (1.116)$$

$$= \sigma_r^2 + \varrho^2 \cdot \sigma_x^2 \quad (1.117)$$

ergibt. Daraus folgt direkt für die Signalvarianz

$$\sigma_x^2 \cdot (1 - \varrho^2) = \sigma_r^2 \quad (1.118)$$

$$\Rightarrow \sigma_x^2 = \frac{\sigma_r^2}{1 - \varrho^2}. \quad (1.119)$$

Da laut [PN08d] und den Überlegungen im Abschnitt 1.1.1.7 das „Maß spektraler Konstanz“ gleich dem Verhältnis der Varianzen von Innovation und korreliertem Prozeß ist

$$\gamma^2 = \frac{\sigma_r^2}{\sigma_x^2}, \quad (1.120)$$

ergibt sich für die AR(1)-Quelle ein MSK von

$$\gamma^2 = 1 - \varrho^2. \quad (1.121)$$

Da das MSK gleich dem Kehrwert des maximalen Prädiktions/Transformationsgewinns ist (s. [PN08b]), ergibt sich dieser zu

$$\max \{G_{TC/Pr}\} = \gamma^{-2} = \frac{1}{1 - \varrho^2}. \quad (1.122)$$

Für die lineare Prädiktion ist die minimale Prädiktionsfehlervarianz somit

$$\min \{\sigma_d^2\} = \sigma_x^2 \cdot (1 - \varrho). \quad (1.123)$$

1.3.2 Zweidimensionale AR(1)-Modelle für Bildsignale.

Bei der Erweiterung des im Abschnitt 1.3.1 vorgestellten AR(1)-Modells für eindimensionale Daten auf zweidimensionale Daten gibt es gemäß [JN90] zwei Möglichkeiten:

Isotropisches 2D-AR(1)-Modell Das isotropische Modell eignet sich mehr für natürliche Bilder und beschreibt die Korrelation zwischen den Bildpunkten $X(m, n)$ und $X(m+k, n+l)$ durch die zweidimensionale Korrelationsmatrix

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{2D,iso}(k, l) = \sigma_x^2 \cdot \varrho^{\sqrt{k^2+l^2}}. \quad (1.124)$$

Die Korrelation zwischen zwei Punkten hängt ohne Bevorzugung einer Richtung nur von der euklidischen Distanz $\sqrt{k^2 + l^2}$ der Punkte ab.

Separierbares 2D-AR(1)-Modell Das separierbare Modell eignet sich mehr für künstliche, menschengeschaffene Bilder und beschreibt die Korrelation zwischen den Bildpunkten $X(m, n)$ und $X(m+k, n+l)$ durch die zweidimensionale Korrelationsmatrix

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{2D,sep}(k, l) = \sigma_x^2 \cdot \varrho_h^{|k|} \cdot \varrho_v^{|l|}, \quad (1.125)$$

was sich zu

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{2D,sep}(k, l) = \sigma_x^2 \cdot \varrho^{|k|+|l|} \quad (1.126)$$

vereinfacht, wenn die Korrelationen ϱ_h und ϱ_v in Zeilen- und Spaltenrichtung als gleich angenommen werden können. Es existieren im Gegensatz zum isotropischen Modell mit der horizontalen und vertikalen Richtung herausragende Richtungen für die Signalstatistik.

Da das separierbare Modell einige mathematische Vorzüge bietet, wird es im Rahmen dieser Arbeit für die Quellenmodellierung von Bildsignalen verwendet.

Die Ausgangskoeffizienten berechnen sich für dieses Modell zu

$$\begin{aligned} X(m, n) = & \varrho \cdot X(m, n-1) + \varrho \cdot X(m-1, n) \\ & - \varrho^2 \cdot X(m-1, n-1) + Z(m, n) \end{aligned} \quad (1.127)$$

wobei $Z(m, n)$ weißes Rauschen mit der Varianz σ_z^2 ist.

Die Varianz des generierten Signals beträgt

$$\sigma_x^2 = \sigma_z^2 \cdot (1 - \varrho^2)^2, \quad (1.128)$$

womit sich der maximale Transformationsgewinn als Kehrwert des Maßes spektraler Konstanz zu

$$\max \{G_{TC,2D}\} = \gamma^{-2} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2} = \frac{1}{(1 - \varrho^2)^2} \quad (1.129)$$

ergibt. Dieser ist bei gleicher Korrelation ϱ somit das Quadrat des maximalen Transformationsgewinns für eindimensionale AR(1)-Signale (vgl. Gleichung 1.122)

$$\max \{G_{TC,2D}\} = \max \{G_{TC,1D}\}^2. \quad (1.130)$$

1.3.3 Korrelationsmatrix separierbarer zweidimensionaler AR(1)-Quellensignale

Für die späteren Betrachtungen ist die Kenntnis der Korrelationsmatrix der verketteten Zeilenvektoren eines Bildes von Bedeutung. Diese Korrelationsmatrix soll in diesem Abschnitt als Kronecker-Produkt der horizontalen und vertikalen AR(1)-Korrelationsmatrizen hergeleitet werden (s. [SL96]), wenn die statistischen Abhängigkeiten innerhalb des Bildes durch ein hinsichtlich der horizontalen und vertikalen Bilddimension separiertes zweidimensionales AR(1)-Modell repräsentiert werden können.

Für den 2×2 -Fall lautet die Bildmatrix

$$N=2 \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}. \quad (1.131)$$

Der Vektor der verketteten Zeilenvektoren ist dann

$$\mathbf{x} = (x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3). \quad (1.132)$$

Die sich daraus ergebene Korrelationsmatrix ist

$$\mathbf{R}_{xx} = E \{ \mathbf{x}^H \cdot \mathbf{x} \} \quad (1.133)$$

$$= E \left\{ \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0 \cdot x_1 & x_0 \cdot x_2 & x_0 \cdot x_3 \\ x_0 \cdot x_1 & x_1^2 & x_1 \cdot x_2 & x_1 \cdot x_3 \\ x_0 \cdot x_2 & x_1 \cdot x_2 & x_2^2 & x_2 \cdot x_3 \\ x_0 \cdot x_3 & x_1 \cdot x_3 & x_2 \cdot x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} \right\}. \quad (1.134)$$

Können die Bildsignale durch das im Abschnitt 1.3.2 vorgestellte separierbare zweidimensionale AR(1)-Modell repräsentiert werden, dann gilt $E\{x_0 \cdot x_1\} = \sigma_x^2 \cdot \varrho_x$, $E\{x_0 \cdot x_2\} = \sigma_x^2 \cdot \varrho_y$, $E\{x_0 \cdot x_3\} = \sigma_x^2 \cdot \varrho_x \cdot \varrho_y$ und $E\{x_0 \cdot x_0\} = \sigma_x^2$ etc.

Die Korrelationsmatrix läßt sich dann in der Form

$${}^{2N}\mathbf{R}_{xx} = \sigma_x^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \rho_x & \rho_y & \rho_x \cdot \rho_y \\ \rho_x & 1 & \rho_x \cdot \rho_y & \rho_y \\ \rho_y & \rho_x \cdot \rho_y & 1 & \rho_x \\ \rho_x \cdot \rho_y & \rho_y & \rho_x & 1 \end{pmatrix} \quad (1.135)$$

schreiben, welche sich auch als Kronecker-Produkt der Korrelationsmatrizen des AR(1)-Modells für die horizontalen und vertikalen statistischen Abhängigkeiten ergibt.

$${}^{2N}\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{R}_H \otimes \mathbf{R}_V, \quad (1.136)$$

wobei

$$\mathbf{R}_H = \sigma_H^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \rho_x \\ \rho_x & 1 \end{pmatrix} \quad (1.137)$$

die Korrelationsmatrix der Zeilenvektoren des Bildes am Beispiel $N = 2$ ist und

$$\mathbf{R}_V = \sigma_V^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \rho_y \\ \rho_y & 1 \end{pmatrix} \quad (1.138)$$

die Korrelationsmatrix der Spaltenvektoren des Bildes für den Fall $N = 2$ ist.

Dieses Schema läßt sich rekursiv/induktiv auf Bildmatrizen höherer Ordnung erweitern.

1.3.4 Kronecker-Faktorisierung einer approximierten ein-dimensionalen AR(1)-Korrelationsmatrix

Durch die Kronecker-Faktorisierung von Matrizen kann der Berechnungsaufwand drastisch reduziert werden, wenn z.B. Matrizeninvertierungen durchgeführt werden müssen. Gemäß der Rechenregel

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1} \quad (1.139)$$

kann die Invertierung einer kronecker-faktorisierbaren $N^2 \times N^2$ -Matrix in die Invertierung zweier $N \times N$ -Matrizen separiert werden.

Auch wenn die Ergebnisse dieses Abschnitts für diese Arbeit keine direkte Relevanz haben, soll die approximierte Kronecker-Faktorisierung einer AR(1)-Matrix an dieser Stelle dokumentiert werden.

Allerdings ist diese Faktorisierung für diese Matrix

$$\mathbf{R}_{xx}(m, n) = \rho^{|m-n|} \quad (1.140)$$

in zwei Kronecker-Faktormatrizen \mathbf{A} und \mathbf{B}

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \quad (1.141)$$

nicht möglich.

Eine gute Näherung erreicht man aber mit dem Kronecker-Produkt

$$\tilde{\mathbf{R}}_{xx}^{2N} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \varrho^N \\ \varrho^N & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}_{gen.}(N)} \otimes \mathbf{R}_{xx}^N \quad (1.142)$$

Mit diesem Ansatz erhält man für $N = 4$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{xx}^{N=4} = \begin{pmatrix} 1 & \varrho & \varrho^2 & \varrho^3 \\ \varrho & 1 & \varrho^3 & \varrho^2 \\ \varrho^2 & \varrho^3 & 1 & \varrho \\ \varrho^3 & \varrho^2 & \varrho & 1 \end{pmatrix} \quad (1.143)$$

und für $N = 8$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{xx}^{N=8} = \begin{pmatrix} 1 & \varrho & \varrho^2 & \varrho^3 & \varrho^4 & \varrho^5 & \varrho^6 & \varrho^7 \\ \varrho & 1 & \varrho^3 & \varrho^2 & \varrho^5 & \varrho^4 & \varrho^7 & \varrho^6 \\ \varrho^2 & \varrho^3 & 1 & \varrho & \varrho^6 & \varrho^7 & \varrho^4 & \varrho^5 \\ \varrho^3 & \varrho^2 & \varrho & 1 & \varrho^7 & \varrho^6 & \varrho^5 & \varrho^4 \\ \varrho^4 & \varrho^5 & \varrho^6 & \varrho^7 & 1 & \varrho & \varrho^2 & \varrho^3 \\ \varrho^5 & \varrho^4 & \varrho^7 & \varrho^6 & \varrho & 1 & \varrho^3 & \varrho^2 \\ \varrho^6 & \varrho^7 & \varrho^4 & \varrho^5 & \varrho^2 & \varrho^3 & 1 & \varrho \\ \varrho^7 & \varrho^6 & \varrho^5 & \varrho^4 & \varrho^3 & \varrho^2 & \varrho & 1 \end{pmatrix} \quad (1.144)$$

Dabei gilt für die Determinante der approximierten Quellenkorrelationsmatrix

$$\det \left({}^{2N}\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}} \right) = \det \left(\begin{pmatrix} 1 & \varrho^N \\ \varrho^N & 1 \end{pmatrix} \otimes {}^N\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}} \right) \quad (1.145)$$

$$= \det \left(\begin{pmatrix} 1 & \varrho^N \\ \varrho^N & 1 \end{pmatrix} \right)^N \cdot \det \left({}^N\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}} \right)^2 \quad (1.146)$$

$$= (1 - \rho^{2N})^N \cdot \det \left({}^N\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}} \right)^2. \quad (1.147)$$

Kapitel 2

Theorie

Die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Lösung beruht gemäß Abbildung 1.6 auf einer variabel (de)korrelierenden Transformation \mathbf{T} , welche somit variable Kompromisse zwischen Quellen- und Kanalcodierung ermöglicht, und einem optimalen Schätzer $\mathbf{T}_{inv.}^{opt.}$, welcher die somit mehr oder weniger vorhandene Signalkorrelation zur Korrektur von Übertragungsfehlern durch ausgefallene Koeffizienten nutzt.

Für den Ausfall der laut Abbildung 1.6 einzeln und unabhängig übertragenen Koeffizienten können z.B. bei Funkübertragung auf mehreren Frequenzen (z.B. OFDM¹) kurzzeitige Störungen durch Mehrwegeempfang oder andere Sendetätigkeiten auf einigen dieser Frequenzen verantwortlich sein.

Ein anderes Beispiel wären Echtzeitübertragungen von z.B. *streaming video* über mehrere logische Internet-Datenverbindungen, wovon einige für die rechtzeitige Wiedergabe zu hohe Verzögerungen durch Überlastungen aufweisen.

In diesem Kapitel werden die beiden Grundelemente der Lösung, die variabel (de)korrelierende Transformation und der auf der Signalkorrelation arbeitende Schätzer, vorgestellt werden.

2.1 Die (de)korrelierende Transformation

Für die variabel dekorrelierende Transformation wurde der Ansatz von Goyal aus [GKAV] aufgegriffen, die bereits bekannte 2×2 korrelierende Transformation im Sinne eines Subband-Coders zu einer Transformation höherer Ordnung zu kaskadieren. Diese neue Transformation soll im Folgendem CCT (*Cascaded Correlating Transform*) genannt werden.

Vorerst sollen aber die Eigenschaften der zugrundeliegenden 2×2 -Transformation

¹ *Orthogonal Frequency Division Multiplexing*, s. [PN08a]

dargelegt werden.

2.1.1 Die (de)korrelierende Transformation im \mathbb{R}^2 .

Die zugrundeliegende 2×2 paarweise korrelierende Transformation ist eine der bekanntesten Techniken zum *multiple description transform coding* (s. [GK98], [WOR99], [RAG00] oder [Goy01b]).

Der grundlegende Ansatz besteht darin, die Basisvektoren der KLT-Lösung für den \mathbb{R}^2 (s. Abschnitt 1.1.1.5)

$${}^2\mathbf{T}_{KLT} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

leicht zu verstimmen (s. Abbildung 2.1), so daß die Transformation nicht mehr optimal dekorreliert.

Die von Goyal erarbeitete Transformation und ihre inverse Transformation sind gegeben durch (s. [WOR99],[RAG00])

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1/2\alpha \\ -\alpha & 1/2\alpha \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{T}_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\alpha} & -\frac{1}{2\alpha} \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

In [WOVR01] wurde diese Transformation aus der Menge aller möglichen Kombinationen von Drehwinkeln und Längen der Basisvektoren

$$\mathbf{T}(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) = \begin{pmatrix} r_1 \cdot \cos(\varphi_1) & r_1 \cdot \sin(\varphi_1) \\ r_2 \cdot \cos(\varphi_2) & r_2 \cdot \sin(\varphi_2) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

als optimale Lösung für den gewünschten Zweck des *multiple description codings* hergeleitet. Es ist noch besonders hervorzuheben, daß die Determinante dieser Transformation unabhängig von der Wahl von α immer 1 ist

$$\det(\mathbf{T}_\alpha) = \alpha \cdot \frac{1}{2\alpha} + \alpha \cdot \frac{1}{2\alpha} = 1. \quad (2.4)$$

Damit existiert nicht nur die inverse Transformation für alle α , auch die Verwendung als Integertransformation $\mathbf{T} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ wird erleichtert. Denn, wenn die Elemente der Transformationsmatrix ganzzahlige Werte darstellen, sind auch die Elemente der inversen Transformationsmatrix gemäß

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{T}_\alpha)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

wieder ganzzahlige Werte.

Diesem Umstand kommt deshalb eine besondere Bedeutung zu, da für nichtorthonormale Transformationen (s. [WOVR01]) die Grundannahme bei der Ableitung der Gleichungen für die Optimalquantisierung nicht mehr ohne weiteres gilt.

Diese Grundannahme besteht darin (s. [JN90]), daß die Quantisiererzellen so klein sind, daß die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Eingangssignals in ihnen als konstant angenommen werden kann. Die Einhaltung dieser Bedingung wird bei nichtorthonormalen Transformationen dadurch erschwert, daß die Quantisiererzellen zurücktransformiert in den Ortsbereich nicht mehr rechteckig, sondern trapezförmig sind und somit einen größeren Bereich der Signal-ADV abdecken.

Da die bisherigen Anwendungen für die 2×2 -Transformationen in der Korrelation benachbarter DCT-Koeffizienten bestand (s. [WOVR01]), ging man diesem Problem damit aus dem Weg, indem man die korrelierende Transformation erst nach der Quantisierung einsetzte und deshalb auf Integer-Transformationen angewiesen war.

Für nur geringfügig nichtorthonormale Transformationen sollte dieses Problem aber vernachlässigbar sein.

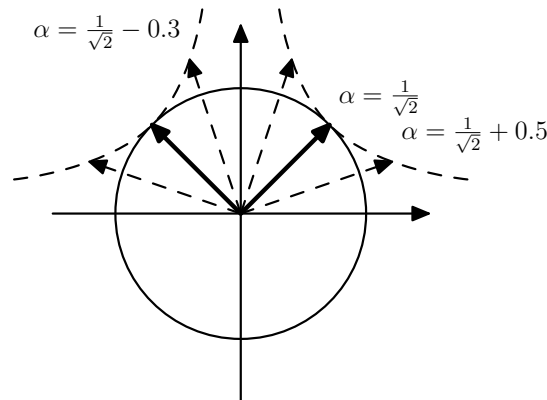


Abbildung 2.1: Basisvektoren der korrelierenden Transformation in Abhängigkeit von α

Die Transformation ist für $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ orthonormal und für abweichende Werte zunehmend nichtorthonormal (s. Abbildung 2.1). Deshalb wird die Variable α in Zukunft teilweise in der Form $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} + \epsilon$ dargestellt, wobei ϵ ein direktes Maß für die Nichtorthonormalität ist. Abbildung 2.1 zeigt auch, daß die beiden Basisvektoren der Transformationen stets den gleichen Betrag haben.

Um das Wesen der Transformation zu verstehen, bietet sich folgende Faktorisie-

ung in folgende Untertransformationen

$$\mathbf{T}_\alpha = \mathbf{T}_{\text{kor.}} \cdot \mathbf{T}_{\text{orthon.}} \quad (2.6)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1/2\alpha \\ -\alpha & 1/2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}\cdot\alpha} & \frac{1}{2\sqrt{2}\cdot\alpha} - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}\cdot\alpha} - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} & \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}\cdot\alpha} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

an. Zuerst wirkt auf die Eingangsdaten eine dekorrelierende orthonormale Transformation $\mathbf{T}_{\text{orthon.}}$, deren Transformationskoeffizienten dann mit einer nichtorthogonalen Transformationsmatrix $\mathbf{T}_{\text{kor.}}$ korreliert werden (s. Abbildung 2.2).

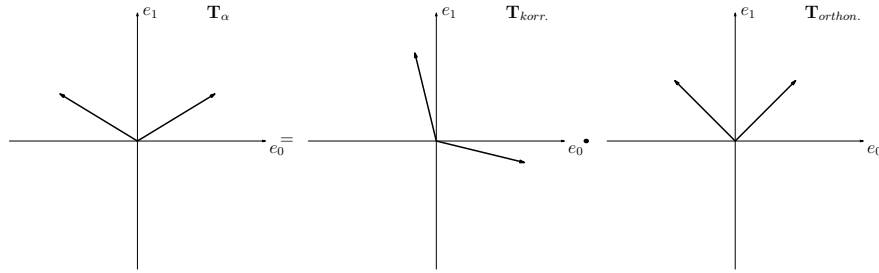


Abbildung 2.2: Faktorisierung der korrelierenden 2×2 -Transformation in zwei Untertransformationen.

Die in den Transformationskoeffizienten verbleibende Quellenkorrelation kann unter der Annahme eines AR(1)-Quellenmodells exakt berechnet werden. Gemäß der Transformationsgleichung

$$\vec{y} = \mathbf{T}_\alpha \cdot \vec{x} \quad (2.8)$$

berechnen sich die Transformationskoeffizienten zu

$$y_0 = \alpha \cdot x_0 + \frac{x_1}{2\alpha} \quad (2.9)$$

$$y_1 = -\alpha \cdot x_0 + \frac{x_1}{2\alpha} . \quad (2.10)$$

Unter der Annahme $\sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2$ ergibt sich die normalisierte Korrelation zwischen den Transformationskoeffizienten zu

$$\rho_y = \frac{E\{y_0 \cdot y_1\}}{\sqrt{\sigma_{y_1}^2 \cdot \sigma_{y_2}^2}} \quad (2.11)$$

$$= \frac{\mathbf{R}_{yy}(1, 1)}{\sqrt{\mathbf{R}_{yy}(1, 1) \cdot \mathbf{R}_{yy}(2, 2)}} \quad (2.12)$$

mit

$$\mathbf{R}_{yy} = E\{y \cdot y^H\} \quad (2.13)$$

$$= \sigma_x^2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4\alpha^2} + \alpha^2 + \rho_{01}^{(x)} & \frac{1}{4\alpha^2} - \alpha^2 \\ \frac{1}{4\alpha^2} - \alpha^2 & \frac{1}{4\alpha^2} + \alpha^2 - \rho_{01}^{(x)} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$\Rightarrow \rho_y = \frac{\frac{1}{4\alpha^2} - \alpha^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{4\alpha^2} + \alpha^2\right)^2 - \rho_x^2}} \quad (2.15)$$

Gleichung 2.15 zeigt, daß die verbleibende Korrelation für den Fall $\epsilon = 0$ (KLT-Lösung!) zu Null wird.

Ein wichtiges Ergebnis ist, daß selbst für ein absolut unkorreliertes Eingangssignal ($\rho_x = 0$) eine Korrelation im Ausgangssignal entsteht, solange $\epsilon \neq 0$ ist

$$\rho_y = \frac{\frac{1}{4\alpha^2} - \alpha^2}{\left|\frac{1}{4\alpha^2} + \alpha^2\right|^2}. \quad (2.16)$$

Die in den Transformationskoeffizienten enthaltene Korrelation ist somit die Summe (wiederverstärkte) Signalkorrelation und durch die Transformation selbst geschaffene Korrelation.

Die mit zunehmenden ϵ abnehmende Dekorrelationsfähigkeit schlägt sich in einem schlechteren Transformationsgewinn (s. [JN90] und Abschnitt 1.1.1.7) nieder

$$G_{TC} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{y_k}^2}{\left(\prod_{k=0}^{N-1} \sigma_{y_k}^2\right)^{\frac{1}{N}}} \quad (2.17)$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot (\sigma_{y_0}^2 + \sigma_{y_1}^2)}{\sqrt{\sigma_{y_0}^2 \cdot \sigma_{y_1}^2}} \quad (2.18)$$

$$= \frac{\frac{1}{4\alpha^2} + \alpha^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{4\alpha^2} + \alpha^2\right)^2 - \rho_{in}^2}}. \quad (2.19)$$

Mit $\kappa = \left(\frac{1}{4\alpha^2} + \alpha^2\right)$ vereinfacht sich dies zu

$$G_{TC} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{\kappa}\right)^2}}. \quad (2.20)$$

Abbildung 2.1.1 zeigt die Entwicklung der Korrelation im Ausgangssignal und des Transformationsgewinns in Abhängigkeit von der steigenden Nichtorthogonalität ϵ . Deutlich erkennbar ist, daß die Entwicklung bis $\epsilon = 0,1$ nahezu linear erfolgt, bis eine Art Sättigung eintritt.

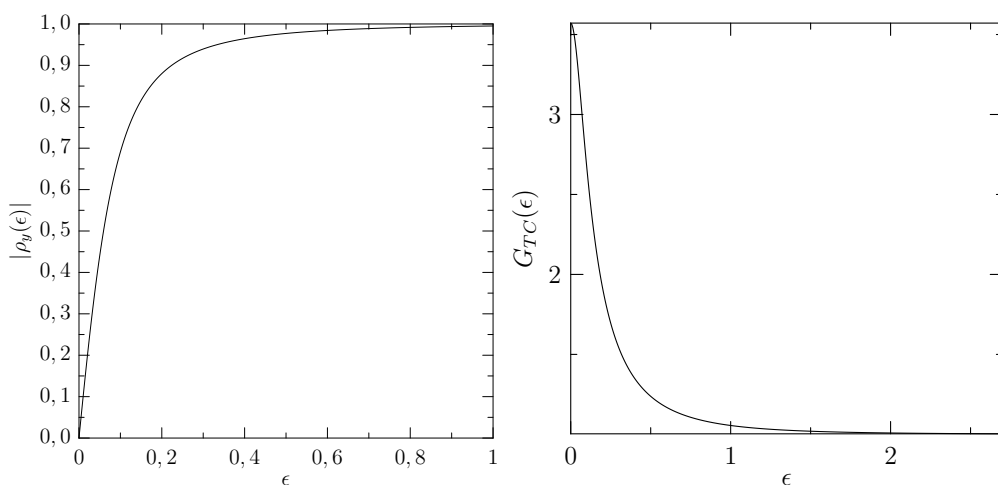


Abbildung 2.3: Links: Korrelation des Ausgangssignals. Rechts: Entwicklung des Transformationsgewinns mit steigender Nichtorthonormalität ($\rho = 0,96$).

2.1.1.1 Interpretation von κ

Im letztem Abschnitt wurde mit Gleichung 2.20 die in Folge noch sehr wichtige Hilfsvariable

$$\kappa_{N=2} = \alpha^2 + \frac{1}{4\alpha^2} \quad (2.21)$$

eingeführt. Diese Variable entspricht dem Betragsquadrat der Basisvektoren der Transformation aus Gleichung 2.2

$$= |\varphi_k|^2 \text{ mit } \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

welches nicht nur bei den orthonormalen Transformationen sondern auch bei der korrelierenden Transformation für alle Basisvektoren gleich groß ist (s. Abbildung 2.1).

Der Wert von κ ist 1 für den orthonormalen Fall $\epsilon = 1$ und $\kappa > 1$ für $\epsilon \neq 0$.

2.1.2 Der optimale Schätzer für die 2×2 -Transformation

Geht einer der Transformationskoeffizienten y_0 oder y_1 bei der Übertragung verloren, so muß der Quellensignalvektor $\mathbf{x} = [x_0 \ x_1]^H$ aus dem verbleibenden Koeffizienten $y_{0/1}$ geschätzt werden. Unter der Annahme einer gleichanteilsfreien Quelle kann man diese Schätzung gemäß

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \cdot y_{0/1} \quad (2.23)$$

formulieren. Das Optimierungsziel ist die Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers der Schätzung

$$E \{ |x - \hat{x}|^2 \} \rightarrow Minimum \quad (2.24)$$

in Hinsicht auf die Komponenten des Rekonstruktionsvektors $[\varphi_0 \ \varphi_1]^H$.

Unter der Annahme der Transformation benachbarter Quellensignalkoeffizienten $x_0 = x[2n]$ und $x_1 = x[2n + 1]$ kann davon ausgegangen werden, daß die Varianzen der Quellensignalkoeffizienten x_0 und x_1 gleich sind und sich somit als σ_x^2 schreiben lassen.

Wenn nur y_0 empfangen wurde, ergibt sich ein Minimierungsproblem

$$\frac{d}{d\varphi_{0/1}} E \left\{ \left| \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \cdot y_0 \right|^2 \right\} \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{d}{d\varphi_{0/1}} E \{ (x_0 - \varphi_0 \cdot y_0)^2 + (x_1 - \varphi_1 \cdot y_0)^2 \} \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.26)$$

Für φ_0 erhält man

$$E \{ 2(x_0 - \varphi_0 \cdot y_0) \cdot (-y_0) \} \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.27)$$

$$\varphi_0 \cdot E \{ y_0^2 \} = E \{ x_0 \cdot y_0 \}, \quad (2.28)$$

woraus mit Gleichung 2.9 für y_0 folgt

$$\varphi_0 E \left\{ \alpha^2 x_0^2 + x_0 x_1 + \frac{1}{4\alpha^2} x_1^2 \right\} = E \left\{ \alpha x_0^2 + \frac{1}{2\alpha} x_0 x_1 \right\} \quad (2.29)$$

$$\varphi_0 \left(\alpha^2 \sigma_x^2 + r_{01} + \frac{1}{4\alpha^2} \sigma_x^2 \right) = \alpha \sigma_x^2 + \frac{1}{2\alpha} r_{01} \quad (2.30)$$

so daß sich letztendlich

$$\varphi_0 = \frac{\alpha + \frac{1}{2\alpha} \cdot \rho_x}{\alpha^2 + \frac{1}{4\alpha^2} + \rho_x} \quad (2.31)$$

ergibt, wobei

$$\rho_x = \frac{E \{ x_0 \cdot x_1 \}}{\sigma_x^2} \quad (2.32)$$

die normierte Korrelation zwischen den benachbarten Quellensignalkoeffizienten x_0 und x_1 ist.

Die Berechnung von φ_2 und die Lösung für den Verlust von y_1 erfolgen nach dem gleichem Muster. Letztendlich erhält man die optimale Schätzlösung zu

$$\hat{\mathbf{x}}_{y_0} = \frac{1}{\alpha^2 + \frac{1}{4\alpha^2} + \rho_{in}} \cdot \begin{pmatrix} 1/2\alpha \cdot \rho_{in} + \alpha \\ 1/2\alpha + \alpha \cdot \rho_x \end{pmatrix} \cdot y_0 \quad (2.33)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{y_1} = \frac{1}{\alpha^2 + \frac{1}{4\alpha^2} - \rho_{in}} \cdot \begin{pmatrix} 1/2\alpha \cdot \rho_{in} - \alpha \\ 1/2\alpha - \alpha \cdot \rho_x \end{pmatrix} \cdot y_1, \quad (2.34)$$

wobei $\hat{\mathbf{x}}_{y_0}$ die Schätzung von $\tilde{\mathbf{x}}$ aus y_0 ist.

2.1.2.1 Der orthonormale Fall

Für den orthonormalen Fall $\alpha = 1/\sqrt{2}$ werden die Schätzlösungen 2.33 und 2.34 unabhängig von der Korrelation des Eingangssignals, da nach Gleichung 2.15 ja die Hintransformation auch keine Signalkorrelation mehr passieren läßt

$$\hat{\mathbf{x}}_{y_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \hat{\mathbf{x}}_{y_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Das Ergebnis ist das von [JN90] bereits bekannte Ergebnis, daß für orthonormale Transformationen die optimale Schätzung durch die inverse Transformation selbst geleistet wird:

$$\hat{\mathbf{x}}_{y_0} = \mathbf{T}_{\epsilon=0}^H \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \hat{\mathbf{x}}_{y_1} = \mathbf{T}_{\epsilon=0}^H \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Da keine Korrelationen mehr vorhanden sind, ist die Information des entsprechenden Basisvektors unwiderruflich verlorengegangen.

2.1.3 Die kaskadierte korrelierende Transformation (CCT).

Mit der bisher besprochenen elementaren (de)korrelierenden Transformation lassen sich nur zweidimensionale Datenvektoren transformieren.

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie die elementare 2×2 -Transformation nach Gleichung 2.2 nach dem Prinzip der Teilbandcodierung (s. [JN90], [VK95]) durch Kaskadenschaltung zu Transformationen höherer Ordnung verallgemeinert werden kann.

Der Vorteil dieser Erweiterung zu Transformationen höherer Ordnung besteht in der Möglichkeit zu einer effizienten Umsetzung nach dem Schema der FFT (s. Abschnitt 2.1.3.4).

2.1.3.1 Die korrelierende Transformation als kritisch abgetastete Filterbank

Die Teilbandcodierung, welche ja zur Transformationscodierung äquivalent ist (s. [VK95]), beschreibt die Transformationen höherer Ordnung als Kaskadierung einer elementaren Grundstruktur, der kritisch abgetasteten zweikanaligen Filterbank (s. Abbildung 2.4).

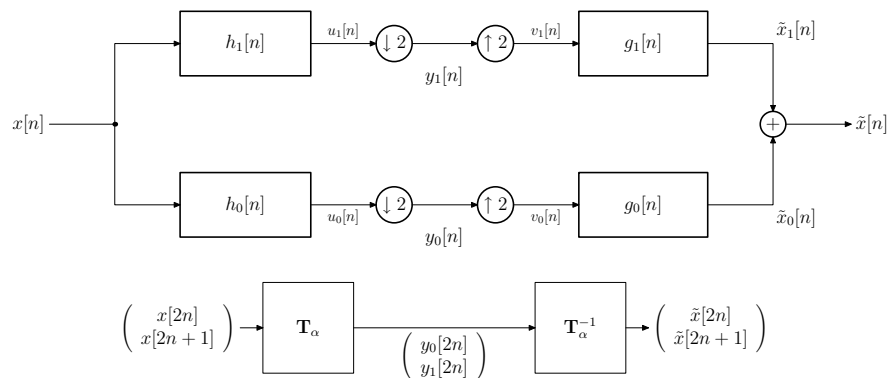


Abbildung 2.4: Kritisch abgetastete zweikanalige Filterbank als Analogie zur Transformation mit der kaskadierenden Transformation.

Die Relation zwischen den Transformationskoeffizienten $y_0[n]$ und $y_1[n]$ und den zwei benachbarten Quellensignalkoeffizienten $x[n]$ und $x[n-1]$ ergibt sich zu

$$u_{0/1}[n] = x[n] * h_{0/1}[n] = \sum_{k=0}^1 h_{0/1}[k] \cdot x[n-k] \quad (2.37)$$

$$\Rightarrow y_{0/1}[n] = h_{0/1}[0] \cdot x[n] + h_{0/1}[1] \cdot x[n-1], \quad (2.38)$$

welches sich in Matrixschreibweise zu

$$\mathbf{y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} h_0[1] & h_0[0] \\ h_1[1] & h_1[0] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

ergibt. Die Rekonstruktion arbeitet auf 1:2 unter- und dann 2:1 hochgetasteten Transformationskoeffizienten

$$v_{0/1} = [y_{0/1} \ 0] \quad (2.40)$$

als Eingangsdaten für die Interpolationsfilter.

$$\tilde{x}_{0/1}[n] = v_{0/1}[n] * g_{0/1}[n], \quad n \in [0, 1] \quad (2.41)$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_{0/1} = \sum_{k=0}^1 g_{0/1}[k] y_{0/1}[n - k] \quad (2.42)$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_{0/1} = g_{0/1}[0] \cdot y_{0/1}[n] + g_{0/1}[1] \cdot y_{0/1}[n - 1] \quad (2.43)$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_{0/1} = g_{0/1}[0] \cdot y_{0/1}[1] + g_{0/1}[1] \cdot y_{0/1}[0] \quad (2.44)$$

Mit $\tilde{x}[n] = \tilde{x}_0[n] + \tilde{x}_1[n]$ folgt

$$\tilde{x}[0] = g_0[1] \cdot y[0] + g_1[1] \cdot y[1] \quad \text{and} \quad (2.45)$$

$$\tilde{x}[1] = g_0[0] \cdot y[0] + g_1[0] \cdot y[1], \quad (2.46)$$

so daß die Matrixschreibweise für die Synthesestufe sich zu

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}_{inv.} \cdot \mathbf{y} = \begin{pmatrix} g_0[1] & g_1[1] \\ g_0[0] & g_1[0] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

ergibt. Mit diesen Gleichungen lassen sich die der korrelierenden Transformation äquivalenten Synthese- und Analysefilter formulieren

$$H_0(z) = \frac{1}{2\alpha} + \alpha \cdot z^{-1} \quad (2.48)$$

$$H_1(z) = \frac{1}{2\alpha} - \alpha \cdot z^{-1} \quad (2.49)$$

$$G_0(z) = \frac{1}{2\alpha} \cdot z^{-1} + \alpha \quad (2.50)$$

$$G_1(z) = \frac{1}{2\alpha} \cdot z^{-1} - \alpha. \quad (2.51)$$

Die Quelle der zusätzlichen Redundanz kann anhand dieser Gleichungen auch im Frequenzbereich aufgezeigt werden. Berechnet man den Amplitudenfrequenzgang der Analysefilter, so erhält man

$$|H_0(j\Omega)| = \sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{4\alpha^2} + \cos(\Omega)} = \sqrt{\kappa + \cos(\Omega)} \quad (2.52)$$

$$|H_1(j\Omega)| = \sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{4\alpha^2} - \cos(\Omega)} = \sqrt{\kappa - \cos(\Omega)}. \quad (2.53)$$

Anhand der Darstellung der Amplitudenfrequenzgänge für den orthonormalen und den nichtorthonormalen Fall in Abbildung 2.5 erkennt man die schlechter werdende Trennschärfe mit steigender Nichtorthonormalität. Damit entstehen zunehmend Aliasanteile, also Leistungsanteile aus dem tieffrequenten Bereich, welche vom Hochpaßanalysefilter mit erfaßt werden und umgekehrt.

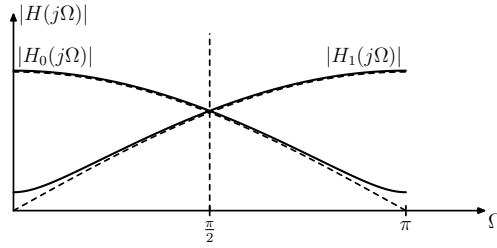


Abbildung 2.5: Amplitudenspektrum der Analysefilter (durchgezogen für $\alpha = 1/\sqrt{2} + 0.1$, gestrichelt für $\alpha = 1/\sqrt{2}$)

Mit $\mathbf{T}_{inv.} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{I}$ muß für die Gesamttransferfunktion

$$H_{ges.}(z) \stackrel{!}{=} z^{-L} \quad (2.54)$$

bzw.

$$H_{ges.}(j\Omega) \stackrel{!}{=} e^{-jL\Omega} \quad (2.55)$$

gelten, d.h. bis auf eine Verzögerung um L Abtastwerte muß das Ausgangssignal dem Eingangssignal entsprechen.

Die 1:2/2:1 Unter/Hochtastung läßt sich als Multiplikation mit $\delta_2[n]$ im Zeitbereich beschreiben. Im Frequenzbereich wird daraus eine Faltung mit $\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{2} \delta_{\frac{2\pi}{2}}(j\Omega) = \frac{1}{2} \cdot \delta_{\pi}(j\Omega)$. Somit kann die Gesamttransferfunktion der kritisch abgetasteten Filterbank aus Abbildung 2.4 in der Form

$$\begin{aligned} H_{ges.}(j\Omega) = & \left[H_0(j\Omega) * \frac{1}{2} \cdot \delta_{\pi}(j\Omega) \right] \cdot G_0(j\Omega) \\ & + \left[H_1(j\Omega) * \frac{1}{2} \cdot \delta_{\pi}(j\Omega) \right] \cdot G_1(j\Omega) \stackrel{!}{=} e^{-jL\Omega} \end{aligned} \quad (2.56)$$

schreiben. Die Faltung mit $\frac{1}{2} \cdot \delta_{\pi}(j\Omega)$ bewirkt eine spektrale Wiederholung der durch die Analysefilter $H_{0/1}(z)$ gefilterten Signalanteile mit der normierten Kreisfrequenz π (s. Abbildung 2.6)

$$\begin{aligned} 2 \cdot e^{-jL\Omega} = & \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_0(j(\Omega - k \cdot \pi)) \right] \cdot G_0(j\Omega) + \\ & \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_1(j(\Omega - k \cdot \pi)) \right] \cdot G_1(j\Omega). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Durch die Anwendung der Synthesefilter $G_{0/1}(j\Omega)$ werden die Summen effektiv auf die Glieder $k \in [-1, 1]$ beschränkt (s. Abbildung 2.6).

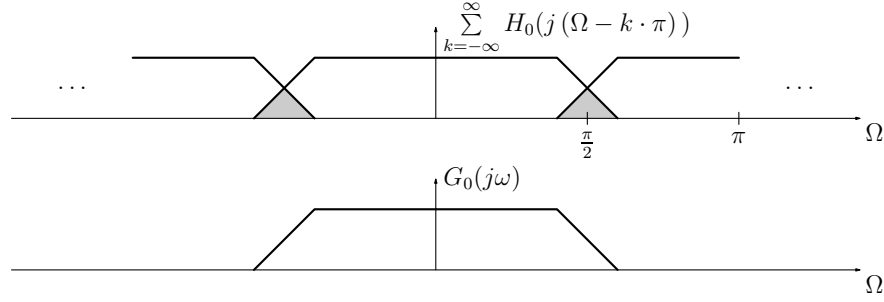


Abbildung 2.6: Entstehung der Aliasanteile (grau eingezeichnet) bei einer kritisch abgetasteten zweikanaligen Filterbank.

Somit ergibt sich

$$2 \cdot e^{-jL\Omega} = H_0(j\Omega) \cdot G_0(j\Omega) + H_0(j(\Omega - \pi)) \cdot G_0(j\Omega) + H_0(j(\Omega + \pi)) \cdot G_0(j\Omega) + H_1(j\Omega) \cdot G_1(j\Omega) + H_1(j(\Omega - \pi)) \cdot G_1(j\Omega) + H_1(j(\Omega + \pi)) \cdot G_1(j\Omega), \quad (2.58)$$

was sich mit der 2π -Periodizität des ZDFT-Spektrums und damit $H_{0/1}(j(\omega - \pi)) = H_{0/1}(j(\omega - \pi + 2\pi)) = H_{0/1}(j(\omega + \pi))$ zu

$$2 \cdot e^{-jL\Omega} = H_0(j\Omega) \cdot G_0(j\Omega) + 2 \cdot H_0(j(\Omega \pm \pi)) \cdot G_0(j\Omega) + H_1(j\Omega) \cdot G_1(j\Omega) + 2 \cdot H_1(j(\Omega \pm \pi)) \cdot G_1(j\Omega) \quad (2.59)$$

vereinfacht. Die Gesamttransferfunktion beinhaltet somit direkt geleitete Signalanteile $H_{0/1}(j\Omega) \cdot G_{0/1}(j\Omega)$ und Aliasfrequenzanteile $H_{0/1}(j(\Omega \pm \pi)) \cdot G_{0/1}(j\Omega)$, also durch die Analysefilter $H_{0/1}(j\Omega)$ gefilterte Frequenzanteile, welche durch die Unter/Hochtastung in den jeweils anderen Frequenzbereich gelangt sind.

In der klassischen Filterbanktheorie wird $H_{ges.} \stackrel{!}{=} e^{-jL\Omega}$ daher in zwei Teilbedingungen zerlegt. Zum einen wird für die über die direkten Pfade $H_{0/1}(z) \rightarrow G_{0/1}(z)$ geführten Signalanteile

$$2 \cdot e^{-jL\Omega} \stackrel{!}{=} H_0(j\Omega) \cdot G_0(j\Omega) + H_1(j\Omega) \cdot G_1(j\Omega) \quad (2.60)$$

bzw. mit $z = e^{j\Omega}$

$$2 \cdot z^{-L} \stackrel{!}{=} H_0(z) \cdot G_0(z) + H_1(z) \cdot G_1(z) \quad (2.61)$$

gefordert, was als *perfect reconstruction* (PR) Bedingung bezeichnet wird ([JN90]). Diese Bedingung würde ohne die Aliasanteile zur Erfüllung von der Bedingung 2.55 reichen.

Daher wird klassischerweise als weitere Bedingung die gegenseitige Auslöschung der Aliasanteile

$$0 \stackrel{!}{=} H_0(j(\Omega \pm \pi)) \cdot G_0(j\Omega) + H_1(j(\Omega \pm \pi)) \cdot G_1(j\Omega) \quad (2.62)$$

gefordert (*frequency domain alias cancellation*, FDAC-Bedingung). Diese vereinfacht sich über

$$0 \stackrel{!}{=} H_0(e^{j(\Omega \pm \pi)}) \cdot G_0(e^{j\Omega}) + H_1(e^{j(\Omega \pm \pi)}) \cdot G_1(e^{j\Omega}) \quad (2.63)$$

$$0 \stackrel{!}{=} H_0(e^{j\Omega} \cdot e^{\pm j\pi}) \cdot G_0(e^{j\Omega}) + H_1(e^{j\Omega} \cdot e^{\pm j\pi}) \cdot G_1(e^{j\Omega}) \quad (2.64)$$

und $z = e^{j\Omega}$ zur Formulierung für die z-Transformierte

$$0 \stackrel{!}{=} H_0(-z) \cdot G_0(z) + H_1(-z) \cdot G_1(z). \quad (2.65)$$

In der beabsichtigten Anwendung als korrelierende Transformation werden die Aliasanteile zur Übertragung zusätzlicher Redundanzen aber eben nicht ausgelöscht, da diese als variabler Fehlerschutz dienen sollen.

Das Einsetzen der Filtergleichungen Gl. 2.48 ff. in die FDAC-Bedingung nach Gleichung 2.65 ergibt dann auch

$$0 \stackrel{!}{=} z^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2\alpha^2} - 2\alpha^2 \right), \quad (2.66)$$

was nur für den orthonormalen Fall $\epsilon = 0 \rightarrow \alpha = 1/\sqrt{2}$ erfüllt ist. Da diese redundanten, d.h. mehrfach vorhandenen Anteile bei der Rekonstruktion / inversen Transformation wieder herausgerechnet werden, muß der Fluß über den direkten Signalweg entsprechend verstärkt werden.

Dies verdeutlicht auch die Prüfung der PR-Bedingung nach Gleichung 2.61, welche als Resultat

$$PR(z) = z^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2\alpha^2} + 2\alpha^2 \right), \quad (2.67)$$

was sich mit der in Gleichung 2.20 eingeführten Variable κ als

$$PR(z) = z^{-1} \cdot 2\kappa \quad (2.68)$$

schreiben läßt. Für den nichtorthonormalen Fall ist $\kappa \neq 1$, somit ergibt sich eine Verstärkung um κ .

Damit erklärt sich das im Abschnitt 4.2.1.4 auftretende Paradoxum, daß das Signal sowohl bei der Hin- als auf der Rücktransformation verstärkt wird, ohne daß eine Gesamtverstärkung erfolgt.

2.1.3.2 Kaskadierung der Filterbänke

Es ist leicht zu zeigen, daß die in 2.7 vorgeschlagene kaskadierte Struktur (s. Abbildung 2.7) in der Tat eine Teilbandcodierung nach Abbildung 2.8 ist.

Die erste Stufe des Teilbandcodierers transformiert zwei benachbarte Quellsignalwerte $x[2n]$ und $x[2n + 1]$ zu den Transformationskoeffizienten $t_0[2n]$ und $t_1[2n]$. Die beiden Analysefilter der zweiten Stufe transformieren jeweils zwei aufeinanderfolgende Ausgangswerte der ersten Stufe, $t_{0/1}[2n]$ und $t_{0/1}[2n - 1]$, in zwei Transformationskoeffizienten $y_{0/2}[4n]$ und $y_{1/3}[4n]$.

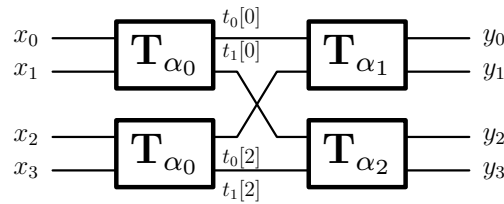


Abbildung 2.7: Kaskadierte korrelierende Transformation nach dem Vorschlag in [GKAV].

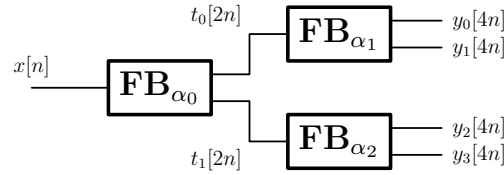


Abbildung 2.8: Teilbandcodierer für $M = 4$.

Der einzige Unterschied zu der kaskadierten Transformation in Abbildung 2.7 besteht darin, daß die Verarbeitung parallel und nicht sequentiell erfolgt.

Die Interpretation in Abbildung 2.7 führt zu einer einfachen Beschreibung der Transformation für $M = 4$ und $\epsilon = 0$

$$t_0[0] = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x_0 + x_1) \quad y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (t_0[0] + t_0[2]) \quad (2.69)$$

$$t_1[0] = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-x_0 + x_1) \quad y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-t_0[0] + t_0[2]) \quad (2.70)$$

$$t_0[2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x_2 + x_3) \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (t_1[0] + t_1[2]) \quad (2.71)$$

$$t_1[2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-x_2 + x_3) \quad y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-t_1[0] + t_1[2]) \quad (2.72)$$

Wendet man die Gleichungen auf der linken Seite auf die Gleichungen rechts an,

so erhält man die Transformationsmatrix zu

$$\mathbf{T}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

Diese Transformationsmatrix ist der Walsh-Hadamard-Transformation aus [JN90] sehr ähnlich, somit kann eine ähnliche Effizienz erwartet werden.

2.1.3.3 Generalisierung zu Transformationen M -ter Ordnung

Solange alle kaskadierten elementaren Transformationen den gleichen Wert für α verwenden, ergibt sich die Transformationsmatrix für den Fall $M = 4$ nach dem für Gleichung 2.73 geschilderten Prinzip zu

$${}^4\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4\alpha^2} \\ -\alpha^2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4\alpha^2} \\ -\alpha^2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4\alpha^2} \\ \alpha^2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4\alpha^2} \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

Diese Matrix läßt sich auch durch

$$= {}^2\mathbf{T} \otimes {}^2\mathbf{T} \quad (2.75)$$

beschreiben, wobei \otimes das Kronecker-Matrixprodukt ist und $\mathbf{T}_{M=2}$ die in Gleichung 2.2 gegebene 2×2 -Transformation.

$${}^4\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 1/2\alpha \\ -\alpha & 1/2\alpha \end{pmatrix} & 1/2\alpha \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 1/2\alpha \\ -\alpha & 1/2\alpha \end{pmatrix} \\ -\alpha \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 1/2\alpha \\ -\alpha & 1/2\alpha \end{pmatrix} & 1/2\alpha \begin{pmatrix} \alpha & 1/2\alpha \\ -\alpha & 1/2\alpha \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

Auch die inverse Transformation 4. Ordnung muß sich durch Kronecker-Multiplikation ergeben, da mit

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \otimes \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \quad (2.77)$$

auch

$$({}^2\mathbf{T}_{inv.} \otimes {}^2\mathbf{T}_{inv.}) \cdot \overbrace{({}^2\mathbf{T} \otimes {}^2\mathbf{T})}^{= {}^4\mathbf{T}} = ({}^2\mathbf{T}_{inv.} \cdot {}^2\mathbf{T}) \otimes ({}^2\mathbf{T}_{inv.} \cdot {}^2\mathbf{T}) \quad (2.78)$$

$$= {}^2\mathbf{I} \otimes {}^2\mathbf{I} \quad (2.79)$$

$$= {}^4\mathbf{I} \quad (2.80)$$

gilt.

Folglich muß sich die inverse Transformation somit zu

$${}^4\mathbf{T}_{inv.} = {}^2\mathbf{T}_{inv.} \otimes {}^2\mathbf{T}_{inv.} \quad (2.81)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4\alpha^2} & -\frac{1}{4\alpha^2} & -\frac{1}{4\alpha^2} & \frac{1}{4\alpha^2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

ergeben.

Das Kronecker-Produkt gibt die kaskadierte Struktur aus 2.7 wieder. Für den ersten Transformationskoeffizienten y_0 werden die Quellsignalkoeffizienten x_0 und x_1 respektive x_2 und x_3 durch die „inneren“ Transformationen transformiert, welche der ersten Stufe der Kaskade entsprechen. Danach werden die Tiefpaßanteile (erster Ausgangskoeffizient) durch die „äußeren“ Matrixkoeffizienten im Kronecker-Produkt transformiert, welche somit der zweiten Kaskadenstufe entsprechen.

Mit dieser Betrachtung läßt sich das Prinzip auf beliebige Größen der nun CCT (*Cascaded Correlating Transform*, s. [KS07]) genannten Transformation verallgemeinern

$${}^{2N}\mathbf{T} = {}^2\mathbf{T} \otimes {}^N\mathbf{T} \quad (2.83)$$

$${}^{2N}\mathbf{T}_{inv.} = {}^2\mathbf{T}_{inv.} \otimes {}^N\mathbf{T}_{inv.} . \quad (2.84)$$

Aus dieser rekursiven Definition folgt

$${}^N\mathbf{T} = \prod_{\otimes}^{\log_2(N)} {}^2\mathbf{T} \quad (2.85)$$

$${}^N\mathbf{T}_{inv.} = \prod_{\otimes}^{\log_2(N)} {}^2\mathbf{T}_{inv.} . \quad (2.86)$$

2.1.3.4 Komplexität der CCT

Die Interpretation der CCT-Transformation als Teilbandcodierung ermöglicht eine schnellere Umsetzung als die direkte Multiplikation des $N \times 1$ -Vektors mit der $N \times N$ -Matrix, die als Hauptkostenfaktor N^2 Fließkomma-Multiplikationen erfordert.

Bei der Umsetzung als Teilbandcodierung gemäß Abbildung 2.8 sind für eine Transformation N -ter Ordnung $\log_2(N)$ Zerlegungsstufen notwendig. Auf der jeweils k -ten Stufe, $k \in [1, \log_2(N)]$, arbeiten 2^k Filter. Jeder dieser Filter ist ein

FIR-Filter 2. Ordnung, somit werden für die Filterung von M Eingangswerten $2M$ Multiplikationen benötigt. Da allerdings durch die folgende 1 : 2-Unterabtastung nur jeder zweite Wert wirklich berechnet werden muß, sind nur M Multiplikationen tatsächlich notwendig.

Durch die nach jeder Stufe erfolgende 1 : 2 Unterabtastung werden in jeder Stufe pro Filter $\frac{N}{2^{k-1}}$ Werte verarbeitet, so daß die Anzahl an Multiplikationen pro Filter $\frac{N}{2^{k-1}}$ beträgt.

Allerdings unterscheiden sich die Impulsantworten der Hoch-/Tiefpässe $h_{0/1}[n] = \{\frac{1}{2\alpha}, \pm\alpha\}$ (s. Gleichung 2.48) nur im Vorzeichen des 2. Koeffizienten, so daß für die Abschätzung der Anzahl an Multiplikationen die Anzahl der Filter pro Stufe effektiv halbiert werden kann.

Somit sind in der k -ten Stufe $\frac{N}{2^{k-1}} \cdot \frac{2^k}{2} = N$ Multiplikationen notwendig. Da es insgesamt $\log_2(N)$ Stufen gibt, berechnet sich der Gesamtaufwand für die CCT-Transformation nach dem Teilbandcodierungsprinzip zu

$$O(N) = N \cdot \log_2(N). \quad (2.87)$$

Die CCT kann somit ebenso effizient wie die FFT umgesetzt werden.

2.2 Der Dekoder

Die Aufgabe des Dekoders besteht in der Ausnutzung der von der variabel de-korrelierenden Transformation mehr oder weniger belassen Signalredundanz zur Verschleierung/Korrektur von Übertragungsfehlern.

Zuerst wurde zur Erfüllung dieser Aufgabe ein Lösungsansatz entwickelt, der auf der Kaskadierung elementarer 2×2 -Schätzer basiert.

Da sich dieser Ansatz nicht bewährt hat, wurde eine globale Gesamtlösung entwickelt, welche den $N \times 1$ -Transformationskoeffizientenvektor in seiner Gesamtheit betrachtet.

Um etwaige Neuevaluierung des ersten Ansatzes zu vermeiden, wird dieser im Rahmen dieser Arbeit ebenfalls dokumentiert.

2.2.1 Der kaskadierte lokale Schätzer

Als erster Lösungsansatz wurde eine kaskadierte Form der mit den Gleichungen 2.33 und 2.34 erarbeiteten Schätzlösung für die 2×2 -Transformation realisiert. Abbildung 2.9 zeigt die Grundidee dieses Ansatzes für eine Transformationsgröße von $M = 8$, wenn die Transformationskoeffizienten 1, 2, 6, 7 nicht empfangen worden sind.

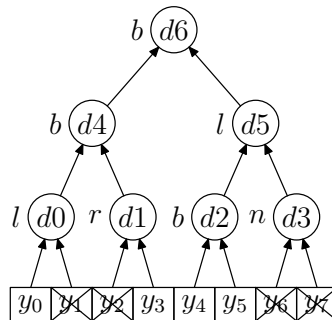


Abbildung 2.9: Der Ansatz zur kaskadierten lokalen Fehlerverschleierung.

Der Dekodierer $d0$ soll sein Ausgangssignal nur aus y_0 gemäß Gleichung 2.33 berechnen, er führt somit eine Schätzung „von links“ durch.

Deshalb ist sein Symbol mit einem „l“ versehen. Der Dekodierer $d1$ kann nur gemäß Gleichung 2.34 schätzen und führt somit eine Schätzung „von rechts“ durch, was mit dem Symbol „r“ angegeben wird.

Der Dekodierer $d2$ empfängt beide Eingangskoeffizienten (bezeichnet durch das „b“-Symbol) und kann somit per normaler inverser Transformation nach Gleichung 2.2 arbeiten.

Dem Dekodierer $d3$ stehen überhaupt keine Eingangskoeffizienten zur Verfügung („n“-Symbol), damit kann er überhaupt keine Schätzung vornehmen. Seine Ausgangsdaten werden für die nächsthöhere Ebene als fehlend vermerkt.

Damit muß der Dekodierer $d5$ nach Gleichung 2.33 vom linken Eingangskoeffizienten her schätzen. Der finale Dekodierer $d6$ kann dann allerdings ganz normal per inverser Transformation rechnen.

Dieser Ansatz hätte den Vorzug, daß man die kaskadierten Teiltransformationen mit unterschiedlichen Werten für α parameterisieren könnte und somit die Transformationskoeffizienten gemäß ihrer Relevanz unterschiedlich stark geschützt hätte.

2.2.1.1 Evaluierung der kaskadierten lokalen Schätzer

Um ein realistisches Bild von der Fehlerrobustheit zu erlangen, wurde eine Übertragung von transformierten 8×8 -Makroblöcken simuliert, die nach Beweis A.2.4 auch durch eine eindimensionale $N = 64$ Transformation der kaskadierten Zeilenvektoren der Makroblockdaten ersetzt werden kann.

Für die Modellierung der Übertragungsfehler wurde nach Empfehlungen aus [HG] für Internetverbindungen und [ZRMM] für drahtlose Verbindungen das Gilbert-Elliot-Modell eingesetzt, da es die für diese Kanäle typischen Bündelfehler (Zeiten

schlechter Kanalqualität) gut modellieren kann.

Gemäß Abbildung 1.6 werden die Transformationskoeffizienten über 64 unabhängige Kanäle übertragen, welche durch jeweils einen Gilbert-Elliot-Kanal realisiert werden. Jeder dieser Kanäle ist durch die mittlere Paketausfallrate p_{err} und die mittlere Fehlerbündellänge L_{burst} parameterisiert. Für die Simulation wurde L_{burst} auf den für Internetkanäle (s. [HG]) typischen Wert von $L_{burst} = 3$ gesetzt und p_{err} variiert.

Die Transformationskoeffizienten werden vor der Übertragung durch einen Max-Lloyd-Optimalquantisierer (s. [JN90]) quantisiert. Die optimale Bitzuteilung wurde gemäß den Resultaten aus Abschnitt 4.2.1.1 mit der Formel 4.27 aus [JN90] für orthonormale Transformationen und eine Zielbitrate von 4 Bit/Koeffizient berechnet.

Für die Ermittlung statistisch relevanter Resultate wurden die Verzerrung über 50 Simulationsdurchläufe gemittelt. In jedem Simulationsdurchlauf wurde das gleiche Fehlermuster für alle getesteten Transformationen verwendet.

Bei Verwendung der CCT benutzten alle kaskadierten Elementartransformationen den gleichen Wert für α . Von den Transformationskoeffizienten wurde über das Histogramm ein Schätzwert für die Entropie, gemäß der Formel

$$\hat{H}(x) = (-1) \cdot \sum_{\forall k} P_k \cdot \log_2(P_k) \quad (2.88)$$

berechnet, wobei P_k der Wert des jeweiligen Histogrammbins ist.

Die Eingangsdaten bestanden aus den 1024 8×8 -Makroblöcken des bekannten Lena-Bildes, deren Zeilenvektoren zu Vektoren der Länge $N = 64$ verkettet wurden. Der normierte Korrelationskoeffizient dieser Vektoren betrug $\varrho_{01} = 0,97726$.

Die Resultate in Hinsicht auf die Robustheit gegen Übertragungsfehlern sind in Abbildung 2.10 dargestellt. Aus der Abbildung geht klar hervor, daß sich das gewünschte Resultat einer erhöhten Fehlerrobustheit bei gesteigerter Nichtorthonormalität der Transformation nicht eingestellt hat. Die besten Ergebnisse ergaben sich bei der orthonormalen Variante der CCT.

Ebenfalls untersucht wurde der Aspekt, ob sich der Ansatz zum Ersatz von zu Null quantisierten Transformationskoeffizienten eignen könnte, indem diese einfach als Übertragungsfehler angesehen werden. Zu diesem Zweck wurde die optimale Bitzuteilung gemäß 4.27 aus den Varianzen der Transformationskoeffizienten berechnet. Alle Koeffizienten mit einer zugeteilten Bitrate $R \leq 0$ wurden als fehlend markiert (auf eine Ratenneuprimierungsschleife wurde verzichtet).

Abbildung 2.11 zeigt die Resultate. Auch hier zeigen sich keine Erfolge, da die lokale Schätzung sich nicht bewährt.

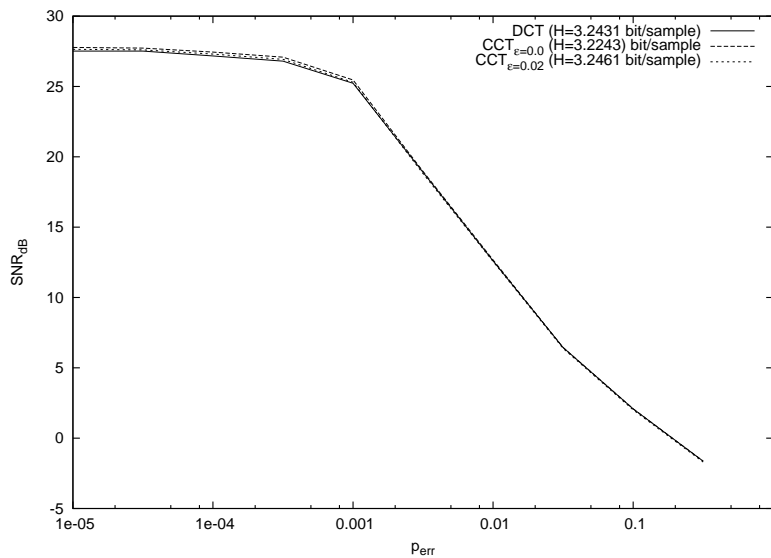


Abbildung 2.10: Robustheit der kaskadierten lokalen Schätzer gegenüber Übertragungsfehlern.

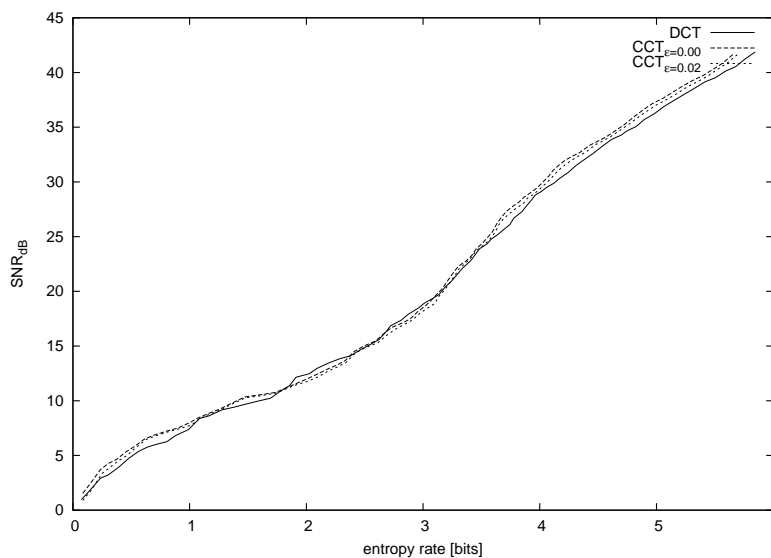


Abbildung 2.11: Rate-Distortion-Vergleich zwischen der CCT (orthogonal und für $\varepsilon = 0.002$) und der DCT.

2.2.2 Die globale Lösung

In diesem Abschnitt wird die global optimale Lösung für das Schätzproblem erarbeitet. Die konkrete Problemstellung ist die Frage nach der Schätzmatrix $\tilde{\mathbf{T}}$, welche die optimale Schätzung des Eingangsvektors $\tilde{\mathbf{x}}$ aus dem Vektor der empfangenen Transformationskoeffizienten $\mathbf{y}_{red.} = \{y_l : l \in S\}$, also aus einer Untermenge $S \subset \Omega$ aller Transformationskoeffizienten Ω , vornimmt.

Die Transformationsgleichung der Hintransformation

$$\mathbf{y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} \quad (2.89)$$

beschreibt jede Komponente y_l des Transformationskoeffizientenvektors \mathbf{y} als Skalarprodukt des Eingangsvektors \mathbf{x} mit den Zeilenvektoren Θ_l der Transformationsmatrix \mathbf{T} .

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \vdots \\ \Theta_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

$$\Rightarrow y_l = \Theta_l \cdot \mathbf{x} \quad (2.91)$$

Die inverse Transformation nach Gleichung

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{y} \quad (2.92)$$

beschreibt den Eingangsvektor \mathbf{x} als Summe der mit den Komponenten des Transformationskoeffizientenvektors gewichteten Spaltenvektoren der inversen Transformationsmatrix

$$\mathbf{x} = \sum_{y_l \in \Omega} \tilde{\Theta}_l \cdot y_l. \quad (2.93)$$

Wenn nur eine Untermenge $S \subset \Omega$ der Transformationskoeffizienten verfügbar ist, kann das Schätzproblem in der Form

$$\tilde{\mathbf{x}} = \sum_{y_l \in S} \tilde{\Theta}_l \cdot y_l \quad (2.94)$$

geschrieben werden, wobei $\tilde{\Theta}$ die Spaltenvektoren der gesuchten Schätzmatrix $\tilde{\mathbf{T}}$ sind.

Der mittlere quadratische Fehler dieser Schätzung berechnet sich zu

$$D = E \{ |\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}|^2 \} \quad (2.95)$$

und soll nun in Abhängigkeit von $\tilde{\Theta}_l$ minimiert werden. Somit ergibt sich folgendes Extremalwertproblem

$$\frac{d}{d\tilde{\Theta}_l} E \left\{ \left(\mathbf{x} - \sum_{k \in S} \tilde{\Theta}_k \cdot y_k \right)^2 \right\} \stackrel{!}{=} 0, \quad (2.96)$$

welches sich zu

$$E \left\{ \left(\mathbf{x} - \sum_{k \in S} \tilde{\Theta}_k \cdot y_k \right) \cdot y_l \right\} \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.97)$$

$$E \{ y_l \cdot \mathbf{x} \} = \sum_{k \in S} \tilde{\Theta}_k \cdot r_{kl}^{(y)} \quad (2.98)$$

umformen läßt. Nach der Transponierung beider Seiten erhält man

$$E \{ y_l \cdot \mathbf{x}^H \} = \sum_{k \in S} \tilde{\Theta}_k^H \cdot r_{kl}^{(y)}. \quad (2.99)$$

Setzt man Gleichung 2.90 ein, erhält man

$$E \{ \Theta_l \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^H \} = \sum_{k \in S} \tilde{\Theta}_k^H \cdot r_{kl}^{(y)} \quad (2.100)$$

und somit letztendlich

$$\Theta_l \cdot \mathbf{R}_{xx} = \sum_{k \in S} \tilde{\Theta}_k^H \cdot r_{yy}(k - l). \quad (2.101)$$

Diese Gleichungen lassen sich durch die Definition zweier Matrizen weiter vereinfachen. Die erste, $\mathbf{T}_{red.}$, ist definiert als

$$\{\Theta_l\}_{l \in S} = \mathbf{T}_{red.} \quad (2.102)$$

und entspricht der Transformationsmatrix \mathbf{T} , wo alle Zeilen $\tilde{\Theta}_k$, die nicht verfügbaren Transformationskoeffizienten $\{y_k : k \in \Omega - S\}$ entsprechen, gestrichen wurden. Mit dieser Matrix läßt sich die linke Seite von Gleichung 2.101 in der Form

$$\{\Theta_l \cdot \mathbf{R}_{xx}\}_{l \in S} = \mathbf{T}_{red.} \cdot \mathbf{R}_{xx}. \quad (2.103)$$

schreiben. Die rechte Seite von 2.101 kann in der gleichen Art und Weise umgeformt werden

$$\sum_{k \in S} \tilde{\Theta}_k^H \cdot r_{kl}^{(y)} = \mathbf{R}_{yy_{red.}} \cdot \tilde{\mathbf{T}}_{inv.}^H, \quad (2.104)$$

wobei $\mathbf{R}_{yy_{red.}}$ der Korrelationsmatrix \mathbf{R}_{yy} entspricht, bei der alle Zeilen *und* Spalten gestrichen wurden, die zur Menge $M = \Omega - S$ der nicht empfangenen Koeffizienten gehören. Gleichung 2.101 läßt sich somit in der Form

$$\mathbf{T}_{red.} \cdot \mathbf{R}_{xx} = \mathbf{R}_{yy_{red.}} \cdot \tilde{\mathbf{T}}_{inv.}^H \cdot \quad (2.105)$$

schreiben. Diese Gleichung kann nach dem gewünschten $\tilde{\mathbf{T}}_{inv.}$ umgestellt werden:

$$\tilde{\mathbf{T}}_{inv.} = \left(\mathbf{R}_{yy_{red.}}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{red.} \cdot \mathbf{R}_{xx} \right)^H \cdot \quad (2.106)$$

Diese Lösung ist identisch zu der optimalen Schätzlösung aus [SL96], wenn man die Quantisierungseffekte vernachlässigt, welche in dieser Ausarbeitung als Rauschmatrix \mathbf{W}_X eingebracht werden, da

$$\Lambda_X = T_{red.} \cdot \mathbf{R}_{xx} \cdot T_{red.}^H \triangleq R_{yy_{red.}} \quad (2.107)$$

und

$$\mathbf{R}_{x,Xcenter} = \mathbf{R}_{xx} \cdot T_{red.}^H \quad (2.108)$$

entspricht.

Gleichung 2.101 hat eine eindeutige, von der Quellenstatistik unabhängige, Lösung für den Fall einer optimal dekorrelierenden Transformation. Für diesen Fall ergibt sich die Korrelation der Transformationskoeffizienten zu

$$r_{kl}^{(y)} = \delta(k - l) \cdot \sigma_{y_l}^2 \quad (2.109)$$

und Gleichung 2.101 damit zu

$$\boldsymbol{\Theta}_l \cdot \mathbf{R}_{xx} = \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_l^H \cdot \sigma_{y_l}^2 \quad (2.110)$$

$$\Rightarrow \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_l^H = \boldsymbol{\Theta}_l \cdot \mathbf{R}_{xx} \cdot \frac{1}{\sigma_{y_l}^2} \cdot \quad (2.111)$$

Die Basisvektoren der optimal dekorrelierenden Transformation, der Karhunen-Loeve-Transform (s. [JN90]), ergeben sich als transponierte Eigenvektoren v_i^H der Korrelationsmatrix des Eingangssignals

$$\{\boldsymbol{\Theta}\} = eig(\mathbf{R}_{xx})^H \quad (2.112)$$

Die korrespondierenden Eigenwerte sind dann die Varianzen der KLT-Transformationskoeffizienten.

$$\lambda_k = \sigma_{y_k}^2 \cdot \quad (2.113)$$

Wendet man das Eigenwertproblem

$$\mathbf{A} \cdot \lambda_i = \mathbf{v}_i \cdot \lambda_i \quad (2.114)$$

auf Gleichung 2.111 an, so erhält man mit der Symmetrieeigenschaft von \mathbf{R}_{xx}

$$\tilde{\Theta}_l \cdot \sigma_{y_l}^2 = (\Theta_l \cdot \mathbf{R}_{xx})^H = \mathbf{R}_{xx} \cdot \Theta_l^H \stackrel{!}{=} (\lambda_l \cdot \mathbf{v}_l)^H \quad (2.115)$$

$$\Rightarrow \tilde{\Theta}_l = \sigma_{y_l}^2 \cdot \Theta_l \cdot \frac{1}{\sigma_{y_l}^2} \quad (2.116)$$

$$= \Theta_l^H. \quad (2.117)$$

Für die optimal dekorrelierende Transformation (die KLT, s. Abschnitt 1.1.1.5) ergibt sich als optimale Schätzlösung die inverse Transformation selbst. Dieses Ergebnis findet sich auch in [JN90].

Man beachte, daß dies nur für die KLT gilt. Für suboptimale Transformationen, wie die DCT, ergibt Gleichung 2.101 eine andere Lösung für das Schätzproblem als die reduzierte inverse Transformationsmatrix.

Somit kann die Lösung aus Gleichung 2.101 auch dazu verwendet werden, um DCT-transformierte Daten im Fehlerfall besser zu rekonstruieren bzw. eine bessere Rekonstruktion bei zu Null quantisierten Koeffizienten zu erreichen, als mit der normalen inversen Transformationsmatrix.

2.2.3 Die Lösung für separierbare zweidimensionale Transformationen.

Die im JPEG- bzw. MPEG-Standard eingesetzte zweidimensionale DCT ist eine Transformation, welche die $N \times N$ -Matrix des als jeweiligen Makroblock definierten Quellensignals in die $N \times N$ -Matrix der Transformationskoeffizienten transformiert (s. [Nel91]).

Die Transformationsgleichung läßt sich gemäß

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}_{1D} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{T}_{1D}^H \quad (2.118)$$

in zwei separierbare eindimensionale Transformationsschritte zerlegen (s. [JN90]):

1. Transformation der Spaltenvektoren \mathbf{x}_k^H von \mathbf{X} ($\mathbf{Y}' = \mathbf{T} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{x}_1^H \mathbf{x}_2^H \dots \mathbf{x}_N^H)$) und
2. Transformation der Zeilenvektoren \mathbf{y}'_k von \mathbf{Y}' ($\mathbf{Y} = \mathbf{Y}' \cdot \mathbf{T}^H = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{Y}'^H)^H$)

Die inverse Transformation berechnet sich zu

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}_{inv., 1D} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{T}_{inv., 1D}^H \quad (2.119)$$

Der intuitiv erste Ansatz, die inversen Transformationen aus Gleichung 2.119 einfach durch die eindimensionale Schätzlösung aus Gleichung 2.101 zu ersetzen, kann nicht funktionieren.

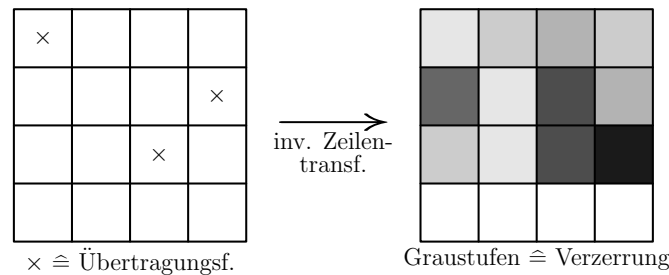


Abbildung 2.12: Änderung des Fehlermodells bei zweidimensionaler separierbarer Transformation.

Abbildung 2.12 zeigt das Problem. Nach der ersten inversen Teiltransformation durch Anwendung der Schätzlösung aus Gleichung 2.101 auf die Zeilen ergibt sich ein neues Fehlermodell, das nicht mehr durch den Ausfall einiger Koeffizienten sondern durch eine mehr oder weniger starke Verzerrung aller Koeffizienten geprägt ist. Für dieses Fehlermodell ist aber die Schätzlösung aus Gleichung 2.101 nicht geeignet.

Die Lösung ergibt sich aus der im Beweis A.2.4 nachgewiesenen Äquivalenz der separierbaren zweidimensionalen Transformation aus Gleichung 2.118 mit der eindimensionalen Transformation der verketteten Zeilenvektoren von \mathbf{X}

$$\mathbf{y} = ({}^N\mathbf{T} \otimes {}^N\mathbf{T}) \cdot \mathbf{x}. \quad (2.120)$$

Durch die Äquivalenz von separierbarer Transformation und der äquivalenten eindimensionalen Transformation nach Gleichung 2.120 kann die Schätzlösung aus Gleichung 2.101 auch auf die Transformationskoeffizienten einer separierbaren zweidimensionalen Transformation angewendet werden, indem die Transformationskoeffizientenmatrix vorher zu einem Vektor der kaskadierten Zeilenvektoren \mathbf{y} umgewandelt wird.

Diese Äquivalenz wird auch bei der praktischen Evaluierung angewendet; die dortige eindimensionale Lösung ist äquivalent zur Verwendung einer separierbaren zweidimensionalen Transformation, wie der 2D-DCT des JPEG/MPEG-Standards.

Für die CCT gilt die Besonderheit, daß aufgrund der kaskadierten Struktur die $N^2 \times N^2$ -Transformation einer separierbaren zweidimensionalen $N \times N$ -Transformation gemäß Gleichung 2.120 entspricht. Gemäß Gleichung 2.120 gilt für die äquivalente eindimensionale Transformation zur separierbaren zweidimensionalen Transformation

$${}^{N^2}\mathbf{T}_{sep.2D} = {}^N\mathbf{T}_{1D} \otimes {}^N\mathbf{T}_{1D}. \quad (2.121)$$

Für die CCT gilt die Bildungsvorschrift gemäß Gleichung 2.83

$${}^{2N}\mathbf{T} = {}^2\mathbf{T} \otimes {}^N\mathbf{T} \quad (2.122)$$

$$\Rightarrow {}^{N^2}\mathbf{T} = \underbrace{\left(\prod_{\otimes}^{\log_2(N)} {}^2\mathbf{T} \right)}_{{}^N\mathbf{T}} \otimes {}^N\mathbf{T} \quad (2.123)$$

$$\Rightarrow {}^{N^2}\mathbf{T} = {}^N\mathbf{T} \otimes {}^N\mathbf{T}. \quad (2.124)$$

2.2.4 Lösung für generelle zweidimensionale Transformationen

Zweidimensionale Transformationen eines $N \times N$ -Bildblocks \mathbf{X} in einen $N \times N$ -Block von Transformationskoeffizienten \mathbf{Y} lassen sich generell als Korrelation von \mathbf{X} mit den Basisbildern \mathbf{B}_k der Transformation durch Bildung des inneren Produkts (s. [VK95]) beschreiben

$$y_k = \langle \mathbf{X}, \mathbf{B}_k \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} X(m, n) \cdot B_k(m, n). \quad (2.125)$$

Die inverse Transformation ergibt sich als Überlagerung der mit den jeweiligen Transformationskoeffizienten y_k gewichteten inversen Basisbildern

$$\mathbf{X} = \sum_{k \in \Omega} y_k \cdot \mathbf{B}_{inv.,k}^H \quad (2.126)$$

mit

$$\Omega = \{k\}, k \in [0, N^2 - 1] \quad (2.127)$$

als Menge aller Transformationskoeffizienten. Entsprechend der Herleitung von Gleichung 2.101 für den eindimensionalen Fall kann die Problemstellung auf das Finden der optimalen Rekonstruktionsbasisbilder $\tilde{\mathbf{B}}_k$ für die Rekonstruktion aus einer Untermenge $S \in \Omega$ der Transformationskoeffizienten formuliert werden

$$\tilde{\mathbf{X}} = \sum_{k \in S} y_k \cdot \tilde{\mathbf{B}}_k^H, \quad (2.128)$$

so daß der mittlere quadratische Fehler der Rekonstruktion minimiert wird.

$$E \left\{ \left(X(m, n) - \tilde{X}(m, n) \right)^2 \right\} \rightarrow \text{Minimum} \quad (2.129)$$

Bei der Herleitung kann auf Tensorrechnung verzichtet werden, wenn man berücksichtigt, daß der Schätzer die Redundanz im Transformationskoeffizientenbereich ausnutzt.

Somit kann man die Komplexität der Problemstellung von der Frage nach den kompletten Basisbildern $\tilde{\mathbf{B}}_k$ auf die Frage nach den einzelnen Bildpunkten $\tilde{\mathbf{B}}_k(m, n) = \tilde{b}_k$ dieser Basisbilder reduzieren.

Wenn zudem $x = \mathbf{X}(m, n)$ ein Bildpunkt von \mathbf{X} und $\tilde{x} = \tilde{\mathbf{X}}(m, n)$ der äquivalente Bildpunkt des geschätzten Bildes ist, läßt sich das reduzierte Schätzproblem wie folgt formulieren:

$$\tilde{x} = \sum_{k \in S} y_k \cdot \tilde{b}_k \quad (2.130)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tilde{b}_l} E \left\{ \left(x - \sum_{k \in S} y_k \cdot \tilde{b}_k \right)^2 \right\} \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.131)$$

$$E \{ x \cdot y_l \} = \sum_{k \in S} \tilde{b}_k \cdot E \{ y_k \cdot y_l \} \quad (2.132)$$

$$\mathbf{r}_{xy_{red.}} = \mathbf{R}_{yy_{red.}} \cdot \tilde{\mathbf{b}} \quad (2.133)$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{R}_{yy_{red.}}^{-1} \cdot \mathbf{r}_{xy_{red.}} \quad (2.134)$$

Der Vektor $\mathbf{r}_{xy_{red.}}$ entspricht dabei in Analogie zur Herleitung von 2.101 dem Korrelationsvektor $\mathbf{r}_{\mathbf{xy}}$, bei dem die den nicht vorhandenen Transformationskoeffizienten entsprechenden Elemente $k \in S$ gestrichen worden sind, $\mathbf{R}_{yy_{red.}}$ der Korrelationsmatrix $\mathbf{R}_{\mathbf{yy}}$, in welcher die entsprechenden Zeilen und Spalten gestrichen worden sind.

2.2.4.1 Äquivalenz zu den bisherigen Lösungen

Die in Gleichung 2.134 erarbeitete generelle Lösung hat die erarbeitete Lösung für separierbare zweidimensionale Transformationen in Gleichung 2.120 und damit die zugrundeliegende Lösung aus Gleichung 2.101 als Sonderfall.

Die berechneten Transformationskoeffizienten bei der Transformation nach Gleichung 2.125 ergeben sich zu

$$y_k = \langle \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{X} \rangle = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \mathbf{B}_k(m, n) \cdot \mathbf{X}(m, n). \quad (2.135)$$

Die Doppelsumme summiert das Produkt der jeweiligen Punkte des Basisbildes \mathbf{B}_k und des Eingangsbildes \mathbf{X} Zeile für Zeile. Diese Summe kann man mit dem Vektor \mathbf{x} der verketteten Zeilenvektoren von \mathbf{X} und dem äquivalenten Vektor \mathbf{b}_k der verketteten Zeilenvektoren von \mathbf{B}_k als

$$y_k = \sum_{l=1}^{N^2} \mathbf{b}_k(l) \cdot \mathbf{x}(l) \quad (2.136)$$

schreiben.

Aus dem Vergleich mit Gleichung 2.120

$$\mathbf{y} = (\mathbf{T}_V \otimes \mathbf{T}_H) \cdot \mathbf{x} \quad (2.137)$$

ergibt sich \mathbf{b}_k als k-ten Zeilenvektor von

$$N^2 \mathbf{T} = \mathbf{T}_V \otimes \mathbf{T}_H. \quad (2.138)$$

Die Basisbilder der separierbaren Transformation ergeben sich somit aus den Zeilenvektoren der Matrix aus Gleichung 2.138. Durch diese Äquivalenz läßt sich die Lösung aus Gleichung 2.134 auf die grundlegende Lösung in 2.101.

2.2.4.2 Interpretation als verallgemeinerter Wiener-Schätzer

Die erarbeitete Lösung aus Gleichung 2.134 kann als verallgemeinerte Wiener-Schätzung (s. [PAP85], [Wie64], [BH97]) im Transformationskoeffizientenbereich angesehen werden. Setzt man für die Transformation die Einheitstransformation an, so wird \mathbf{R}_{yy} zu \mathbf{R}_{xx} und \mathbf{r}_{xy} zu \mathbf{r}_{xx} und Gleichung 2.134 damit zu

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{R}_{xx_{red.}}^{-1} \cdot \mathbf{r}_{xx_{red.}} \quad (2.139)$$

$$X(m, n) = \sum_{\forall k} \tilde{\mathbf{b}}_k^{m,n} \cdot \mathbf{x}_{red.k}. \quad (2.140)$$

Während die Wiener-Hopf-Gleichung üblicherweise nur aus den Vorgängern prädiziert, wird in der erweiterten Form von Gleichung 2.134 aus den umliegenden Werten prädiziert, wobei gleich mehrere Werte prädiziert werden.

Kapitel 3

Evaluierung an Videodaten.

Für die Evaluierung und Präsentation des im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten *joint source-channel*-Kodierers wurde ein Demonstrator in der Programmiersprache Java erstellt, so daß die Evaluierung auf nahezu allen aktuellen Computersystemen nachvollzogen werden kann.

Für die Simulation wird das für eine *multiple description coding*-basierende Übertragung nicht untypische Szenario einer Echtzeit-Videoübertragung vergleichbar dem *motion JPEG*-Standard angenommen, wo die Transformationskoeffizienten der jeweiligen Makroblöcke sofort nach der Erfassung gesendet werden.

Reale Anwendungen sollten zur besseren Ausnutzung der Datenpakete z.B. die jeweiligen Transformationskoeffizienten aller Makroblöcke des aktuellen Bildes in ein Datenpaket legen. So wird zur Dekodierung des Bildes auch nur eine inverse Transformationsmatrix nötig sein.

Beim Empfänger werden dann die Empfangspuffer der getrennten Übertragungskanäle periodisch ausgewertet, um eine konstante Bildwiederholrate zu ermöglichen. Pakete, die aufgrund von Netzwerküberlastungen oder schlechter Übertragungsqualität nicht oder zu spät ankommen, gelten als verloren.

Im Gegensatz zur klassischen Transformationscodierung / Kanalcodierung wird somit von einem Koeffizientenausfall statt einem Bitausfall ausgegangen.

Zur Simulation dieses Szenarios wäre die Übertragung einer Bildsequenz erforderlich. Aus Gründen der Darstellbarkeit wurde für den Demonstrator nur eine Einzelbildübertragung implementiert, wobei für jeden Makroblock eine separat simulierte Übertragung erfolgt. Auf diese Weise können die Korrektoreffekte für verschiedene Störmuster in einem Bild dargestellt werden. Für die SNR_{dB} -Evaluierung ist dieser Unterschied aber bei Mittlung über eine größere Anzahl von Bildern irrelevant.

3.1 Der Demonstrator

Der Demonstrator realisiert nach dem Vorbild des JPEG-Standards (s. [Nel91]) die Transformation der $N \times N$ -Makroblöcke eines Bildes durch auswählbare Transformationen. Die separierbaren 2D-Transformationen werden gemäß der Ergebnisse aus Abschnitt 2.2.3 durch kronecker-kaskadierte eindimensionale Transformationen nach Gleichung 2.120 realisiert, so daß die Schätzlösung aus Gleichung 2.101 verwendet werden kann. Die Transformationskoeffizienten werden nach dem Prinzip von Abbildung 1.6 über N^2 unabhängige Gilbert-Elliot-Kanäle gesendet, welche über die Parameter Fehlerbündellänge (L_{burst}) und Ausfallrate (P_{err}) einheitlich parameterisiert werden.

Nach der inversen Transformation bzw. Schätzung werden die objektiven Güte-
maße des mittleren quadratischen Fehlers (MSE), des SNR_{dB} und des $pSNR_{dB}$ gemäß der Formeln

$$MSE = \frac{1}{M \cdot N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left(X(m, n) - \tilde{X}(m, n) \right)^2 \quad (3.1)$$

$$s_x = \frac{1}{M \cdot N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} X(m, n)^2 \quad (3.2)$$

$$SNR_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{s_x}{MSE} \right) \quad (3.3)$$

$$pSNR_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{255^2}{MSE} \right) \quad (3.4)$$

für die $M \times N$ -Bilder berechnet, welche als 8-Bit-Graustufenbilder eingelesen werden.

Zudem wird aus den Histogrammen $\hat{h}_{y_k}[n]$ der einzelnen Transformationskoeffizienten mittels

$$\hat{H}(y_k) = (-1) \cdot \sum_{\forall n} \hat{h}_{y_k}[n] \cdot \log_2 \left(\hat{h}_{y_k}[n] \right) \quad (3.5)$$

ein Schätzwert für die Entropie und damit für die mittlere Rate pro Pixel ermittelt, welche durch die Transformation bei Verwendung von Entropiecodierung möglich ist, wenn ein System nach Abbildung 1.6 verwendet wird.

3.1.1 Funktionsbeschreibung des Demonstrators

Das Demonstrationsprogramm liegt dem beiliegenden Datenträger als ausführbares Java-Archiv *Demonstrator.jar* bei. Nach dem Start präsentiert sich das Programm wie in Abbildung 3.1.

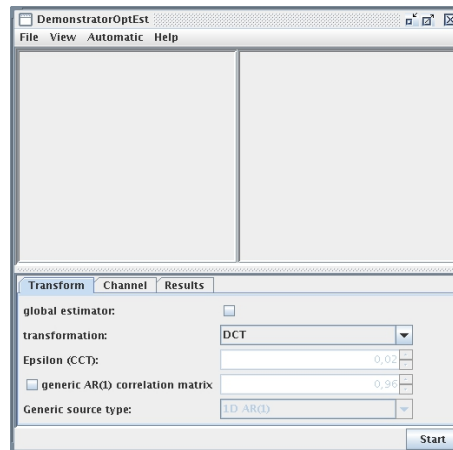


Abbildung 3.1: Demonstrationsprogramm nach dem Start

In der Menüzeile des Programms findet sich zuerst das Dateimenü (*File*), welches folgende Operationen ermöglicht:

Open Öffnen einer Bilddatei. Es werden alle Formate unterstützt, welche die Java-Laufzeitumgebung kennt. Die Bilder werden beim Laden in 8-Bit-Graustufenbilder umgewandelt.

Save Sichern des rekonstruierten Bildes unter dem zuletzt verwendeten Namen.

Save As Sichern des rekonstruierten Bildes unter einem neuem Namen.

Quit Beendet das Programm.

Mittels des *View*-Menüs kann zwischen der direkten Anzeige des rekonstruierten Bildes und des Differenzbildes zum Original umgeschaltet werden (gespeichert wird die angezeigte Variante).

Im *Automatic*-Menü befinden sich vordefinierte Simulationsläufe für komplexere Simulationen. Während der Simulationen werden die Elemente der graphischen Benutzeroberfläche vom Programm gesteuert. Es sind folgende Simulationsläufe verfügbar:

Generic AR(1) Dieser Simulationslauf evaluiert die Brauchbarkeit generischer AR(1)-Modelle für die Schätzung. Dazu werden mit den aktuellen Einstellungen für die Paketausfallrate P_{err} und L_{Burst} 1000 Simulationen durchgeführt, wobei in jedem Versuch zum gleichen Fehlermuster eine inverse Transformation mit dem Schätzer, aber einmal mit der Quellenkorrelationsmatrix und ansonsten mit generischen AR(1)-Matrizen nach dem eindimensionalen und dem separierbaren zweidimensionalen Modell durchgeführt (s.

Abschnitt 1.3.1). Für die Korrelation wird einmal ein Wert von $\varrho = 0,96$ und einmal ein Wert $\varrho = 0,98$ verwendet.

Die gemittelten Ergebnisse werden mit den Simulationsparametern im Vorspann tabellarisch im Log-Reiter angezeigt.

2D AR(1) comparison. In diesem Simulationslauf werden die Ergebnisse für das separierbare und das isometrische generische zweidimensionale AR(1)-Modell verglichen.

Zur Einordnung der Ergebnisse werden zudem die Resultate unter Verwendung der normalen inversen Transformation (bzw. ohne Schätzer) und die Resultate der Schätzung unter Verwendung der tatsächlichen Quellenkorrelationsmatrix als Schätzgrundlage bestimmt.

Die generischen AR(1)-Korrelationsmatrizen werden wiederum mit einem Wert von $\varrho = 0,96$ und $\varrho = 0,98$ parameterisiert. Auch die Ergebnisanzeige erfolgt wieder im Log-Reiter in tabellarischer Form.

Image examples. Mit diesem automatisierten Programmlauf wurden die Bildbeispiele in den Abbildungen 3.5 ff. und die Tabelle 3.1 erarbeitet.

Transform comparison. Dieser automatisierte Programmlauf erstellt die gemittelten Resultate in Tabelle 3.2 und erzeugt die Abbildungen 3.15, 3.16 und 3.17.

Das *Help*-Menü beinhaltet nur eine Information über den Urheber des Programms.

Das Hauptfenster des Programms gliedert sich in zwei wesentliche Teile. Im oberen Teil wird das Originalbild links und das rekonstruierte Bild rechts angezeigt, im unterem Teil befinden sich die Einstellmöglichkeiten für die Simulation.

Direkt darunter befindet sich rechts eine Schaltfläche mit der Aufschrift „Start“, welche die Übertragungs- und Rekonstruktionssimulation auslöst.

Die Einstellmöglichkeiten in den verschiedenen Reitern der unteren Hälfte des Programmfenster werden in Folge beschrieben. Die Reihenfolge der Reiter entspricht dabei dem Simulationsablauf.

3.1.1.1 Die Einstellmöglichkeiten zur Transformation / Rekonstruktion

Abbildung 3.2 zeigt das Demonstrationsprogramm mit den sichtbaren Einstellungen für die Transformation und die Rekonstruktion.

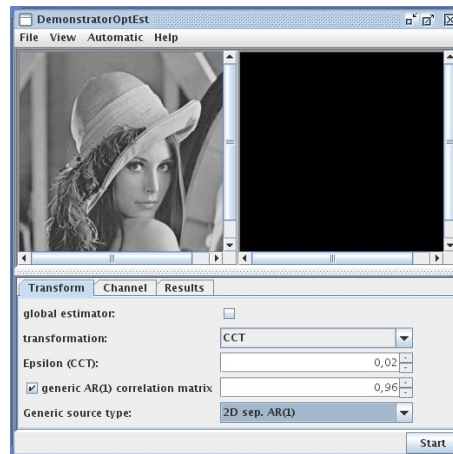


Abbildung 3.2: Einstellmöglichkeiten zur Transformation und Rekonstruktion.

Der oberste Schalter mit der Bezeichnung „*global estimator*“ legt fest, ob für die Rekonstruktion die Schätzlösung aus Gleichung 2.101 verwendet werden soll (an) oder die inverse Transformation (aus).

Die darunter folgende Auswahl legt die verwendete Transformation fest. Dabei werden die 8×8 -Makroblöcke nach dem im Abschnitt 2.2.3 erläuterten eindimensionalen Schema, also durch eine eindimensionale 64×64 -Transformation der verketteten Zeilenvektoren der Makroblöcke, transformiert. Folgende Transformationen stehen zur Auswahl:

DCT Die eindimensionale diskrete Kosinustransformation nach [JN90].

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2N} \cdot k \cdot (2 \cdot n + 1)\right) \cdot \begin{cases} k = 0 & : \sqrt{\frac{1}{N}} \\ \text{sonst} & : \sqrt{\frac{2}{N}} \end{cases} \quad (3.6)$$

CCT Die im Abschnitt 2.1 erarbeitete kaskadierte korrelierende Transformation.

Identity Die Einheitstransformation (zur Überprüfung der Schätzlösung als Wiener-Schätzer).

KLT Die Karhunen-Loeve-Transformation als optimal dekorrelierende Transformation (s. Abschnitt 1.1.1.5).

KLT + CCT Die KLT mit nachgeschalteter CCT, um zu prüfen, ob die CCT evtl. auch perfekt dekorrelierte Daten noch schützen kann.

DST Die eindimensionale diskrete Sinustransformation nach [JN90].

$$X(k) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{N+1} \cdot (n+1) \cdot (k+1)\right) \cdot \quad (3.7)$$

DCT_Sep2D Die zweidimensionale separierbare DCT, wie sie im JPEG/MPEG-Standard verwendet wird. Die zweidimensionale Transformation nach den Überlegungen aus dem Abschnitt 2.2.3 in Form der eindimensionalen Transformation

$${}^{N^2}\mathbf{T} = {}^N\mathbf{T}_{1D-DCT} \otimes {}^N\mathbf{T}_{1D-DCT} \quad (3.8)$$

realisiert.

DST_Sep2D Die zweidimensionale separierbare DST, nach den Überlegungen aus dem Abschnitt 2.2.3 mit der eindimensionalen Transformation

$${}^{N^2}\mathbf{T} = {}^N\mathbf{T}_{1D-DST} \otimes {}^N\mathbf{T}_{1D-DST} \quad (3.9)$$

realisiert.

Die Einheitstransformation und die CCT werden nicht als zweidimensionale separierbare Transformationen angeboten, da für diese Transformationen die Relation

$${}^{N^2}\mathbf{T} = {}^N\mathbf{T} \otimes {}^N\mathbf{T} \quad (3.10)$$

schon erfüllt ist (s. Gleichung 2.124).

Direkt darunter befindet sich ein Regler für die Einstellung des ϵ -Parameters der CCT (s. 2.1.1). Dieser ist nur verfügbar, wenn die CCT auch als Transformation ausgewählt worden ist.

In der darunter liegenden Zeile kann mit dem Schalter links die Verwendung einer generischen AR(1)-Korrelationsmatrix für \mathbf{R}_{xx} statt einer direkt aus dem Signal abgeleiteten Korrelationsmatrix aktiviert werden. Somit kann geprüft werden, ob es ausreicht, nur den Parameter für ρ an den Empfänger zu übermitteln oder die gesamte Quellenkorrelationsmatrix. Der Parameter ρ kann bei aktiviertem Schalter mit dem Regler rechts daneben eingestellt werden.

Mit der darunterliegenden Auswahlbox kann dabei zwischen einem eindimensionalen und dem separierbaren bzw. isometrischen zweidimensionalen AR(1)-Modell gewählt werden (s. Abschnitt 1.3.1).

3.1.1.2 Die Einstellmöglichkeiten zur Kanalsimulation

Abbildung 3.3 zeigt die Einstellungen zur Kanalsimulation. Nach dem Prinzip aus Abbildung 1.6 werden die 64 Transformationskoeffizienten über 64 unabhängige Gilbert-Elliot-Kanäle gesendet, welche einheitlich über die mittlere Fehlerbündellänge L_{burst} und die mittlere Fehlerrate p_{err} parameterisiert werden. Die

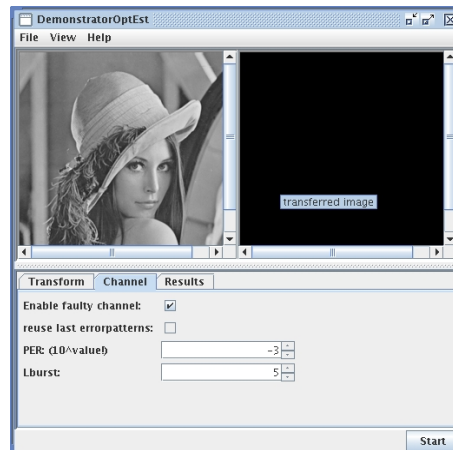


Abbildung 3.3: Einstellmöglichkeiten zur Kanalsimulation.

Einstellungen für diese Parameter finden sich in den unteren beiden Zeilen, wobei die Fehlerrate exponentiell in der Form 10^x eingestellt wird.

Mit dem Schalter „*Enable faulty channel*“ können die Kanalfehler an- oder ausgeschaltet werden. Der darunter liegende Schalter erlaubt die Wiederverwendung des Fehlermusters vom letzten Simulationslauf. Damit können die verschiedenen Transformationen am gleichem Fehler erprobt werden. Er ist erst nach dem ersten Simulationslauf verfügbar.

3.1.1.3 Der Protokoll-Reiter

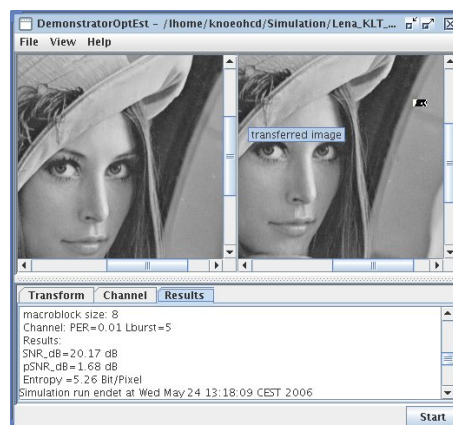


Abbildung 3.4: Ergebnisdarstellung.

In diesem Reiter(s. Abbildung 3.4) werden die Simulationseinstellungen und – ergebnisse dargestellt. Die Dokumentation eines Simulationslaufes hat die folgende Form:


```
New simulation run started at Fri Nov 28 15:49:22 CET 2008
Transformation: CCT with epsilon=0.02
Using global estimator.
macroblock size: 8
Channel: PER=0.0010 Lburst=5
Results:
SNR_dB=57,00 dB
pSNR_dB=59,83 dB
Entropy =5,58 Bit/Pixel
Simulation run endet at Fri Nov 28 15:49:23 CET 2008
```

Zuerst werden die Einstellungen für die Transformation und die Kanäle wiedergegeben. Danach werden die Resultate durch die objektiven Qualitätsmaße SNR_{dB} und $pSNR_{dB}$ sowie die Entropie der Transformationskoeffizienten umgerechnet auf die Rate pro Pixel angegeben. Die Textblöcke für jeden Simulationslauf werden durch die Zeitmarken voneinander abgetrennt.

Mit der rechten Maustaste kann im Protokollfenster ein Kontextmenü abgerufen werden, welches folgende Operationen anbietet:

Save Speichert den Inhalt des Protokollfensters in einer Textdatei.

Save as Speichert die Textdatei unter einem neuem Namen.

Copy to Clipboard Kopiert den ausgewählten Ausschnitt des Protokolls in die Zwischenablage (Mit Ctrl-A kann der gesamte Text ausgewählt werden).

Clear display Löscht den gesamten Text im Protokollfenster.

3.1.1.4 Durchführen einer Simulation.

Nach dem Laden eines Bildes über das Dateimenü (*File* → *Open*) und dem Vornehmen der Einstellungen für die Transformation/Rekonstruktion und den Kanal kann die Simulation über den „Start“-Schaltknopf unten rechts gestartet werden.

Dauert die Simulation länger als eine Sekunde, wird ein Dialog zur Verlaufsanzeige dargestellt. Da die Simulation in einem eigenen Prozeß abläuft, kann das Programm während des Simulationslaufs mit logischen Einschränkungen weiter bedient werden.

3.1.2 Implementierung des Demonstrators.

In diesem Abschnitt wird die Implementierung des Demonstrationsprogramms funktionell beschrieben.

Die Programmstruktur läßt sich in zwei logische Teilbereiche untergliedern:

1. Die Rahmenstruktur und die graphische Benutzerschnittstelle.
2. Mathematische Berechnungsklassen.

3.1.2.1 Die Rahmenstruktur

Die Rahmenstruktur stellt die graphische Benutzerschnittstelle, verarbeitet die Benutzereingaben und verwaltet den Prozeß, in dem die Simulation abläuft.

Die Implementierung der Rahmenstruktur konzentriert sich in der Klasse *MainWindow*. Diese baut im Wesentlichen auf den Elementen und Konzepten des *Abstract Window Toolkits* (AWT, s. [Krü06]) auf, obwohl mangels Alternativen auch auf einige Elemente der SWING-Bibliothek zurückgegriffen wurde, die ebenfalls Bestandteil der elementaren *Java Foundation Classes* ist.

Die graphische Schnittstelle wird hauptsächlich im Konstruktor der *MainWindow*-Klasse aufgebaut. Nur die Erstellung der Menüleiste wurde in eine eigene Methode (*MainWindow::makeMenu()*) ausgelagert.

Die zentrale Reaktion auf Benutzereingaben findet nach dem Konzept der *AWT-ActionListener* in der Methode *MainWindow::actionPerformed(ActionEvent e)* statt. Von dort werden die verschiedenen Methoden zur eigentlichen Bearbeitung der Benutzeraufträge aufgerufen, welche alle den Präfix *action...* tragen (z.B. *MainWindow::actionFileOpen()*, *MainWindow::actionStart()*).

Die Simulation wird über die Methode *actionStart()* gestartet. In dieser Methode wird nach der Überprüfung der notwendigen Voraussetzungen (Bild geladen) ein neuer Leichtgewicht-Prozeß für die Abarbeitung der Simulation gestartet. Auf diese Weise bleibt das Rahmenprogramm trotz der Abarbeitung der Simulation mit logischen Einschränkungen (kein Neuladen der Bilder, keine Änderung der Simulationsparameter) weiter bedienbar.

Die eigentliche Implementierung des Simulationsablaufs findet in der Methode *MainWindow::run()* statt. Der Simulationsablauf läßt sich in drei Teile untergliedern:

1. Einlesen der Parameter aus der graphischen Benutzerschnittstelle.
2. Durchführen der Simulation.
3. Anzeigen des Resultats, Berechnung der Entropie und der objektiven Qualitätsmaße ($(p)SNR_{dB}$, ...) sowie Erstellung des Simulationsprotokolls.

Dauert die Ausführung der Simulation länger als eine Sekunde, wird ein Verlaufsdialog angezeigt, mit dem die Simulation auch abgebrochen werden kann.

Zur Rahmenstruktur gehören auch noch die Klassen *ImageFilter* und *Textfilter*, welche Dateitypfilter für die Dateidialoge zum Herausfiltern von Text- bzw. Bilddateien bereitstellen.

Eine weitere Hilfsklasse ist die Klasse *MainWindow::PopupListener*, welche das Kontextmenü für das Protokollfenster implementiert.

Die verschiedenen automatischen Simulationen aus dem „Automatic“-Menü sind in den Methoden mit dem Namenspräfix „*sweep/...f*“ implementiert.

3.1.2.2 Die Berechnungsklassen.

Diese Klassen dienen der direkten Umsetzung des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Ansatzes. Es handelt sich dabei im Wesentlichen um die folgenden Klassen:

GlobalOptEstimator Implementierung des Schätzverfahrens nach Gleichung 2.106.

GilbertElliotChannel Simulation eines fehlerbehafteten Kanals nach dem Gilbert-Elliot-Kanalmodell.

Histogramm Implementierung einer Histogrammfunktion zur Schätzung der Entropien der Transformationskoeffizienten gemäß Gleichung 3.5.

RxxSepAR1_2D Berechnung der Korrelationsmatrix der verketteten Zeilenvektoren eines separierbaren zweidimensionalen AR(1)-Signals (s. Abschnitt 1.3.2).

CorrelatingTransform Implementierung einer CCT gemäß Abschnitt 2.1.3.

DCT Implementierung der DCT gemäß Gleichung 3.6.

KLT Implementierung der KLT gemäß Gleichung 1.36.

IdentityTransform Implementierung der Einheitstransformation **I**.

Im folgenden werden diese Klassen in ihrer Funktion kurz beschrieben.

3.1.2.3 Die Implementierung des Schätzverfahrens.

Die Klasse *GlobalOptEstimator* implementiert die global optimale Lösung für das Schätzverfahren nach Gleichung 2.101.

Im Konstruktor werden die Transformationsmatrix \mathbf{T} , die inverse Transformationsmatrix $\mathbf{T}_{inv.}$ und die Korrelationsmatrix der Eingangsdaten \mathbf{R}_{xx} übergeben. Daraus wird direkt im Konstruktor mittels

$$\mathbf{R}_{yy} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_{xx} \cdot \mathbf{T}^H \quad (3.11)$$

die Korrelationsmatrix der Transformationskoeffizienten bestimmt.

Die eigentliche Schätzung findet in der Methode *GlobalOptEstimator::estimate(double y[], double xr[], int errorpattern[])* statt. Dieser Methode werden mit dem Parameter y die Transformationskoeffizienten übergeben, ein Feld x zur Aufnahme des rekonstruierten Eingangsvektors $\tilde{\mathbf{x}}$ und ein Vektor *errorpattern* zur Angabe der ausgefallenen Koeffizienten. Alle y_k , für die *errorpattern*[k] = 0 ist, werden als ausgefallen betrachtet.

Bei der Rekonstruktion werden folgende Fälle betrachtet:

Kein Transformationskoeffizient ausgefallen. Für die Abbildung $\mathbf{y} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}$ wird aus Effizienzgründen die normale inverse Transformation verwendet.

Einige, aber nicht alle Transformationskoeffizienten sind ausgefallen.

Die Abbildung $\mathbf{y} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}$ wird mittels der optimalen Schätzlösung nach Gleichung 2.101 durchgeführt. Für die notwendige Matrizeninvertierung und das Matrixprodukt wird auf die JAMA-Matrixklasse (s. [JAM]) zurückgegriffen.

Alle Transformationskoeffizienten sind ausgefallen. Der Eingangsvektor \mathbf{x} wird unter der Annahme der Gleichanteilsfreiheit auf seinen Erwartungswert, den Nullvektor, geschätzt.

3.1.2.4 Die Kanalsimulation.

Die Klasse *GilbertElliotChannel* simuliert einen fehlerhaften Kanal nach dem Gilbert-Elliot-Kanalmodell. Parameterisiert wird die Simulation durch die Angabe der mittleren Ausfallrate P_{err} und der mittleren Bündelfehlerlänge L_{burst} . Aus diesen Angaben werden die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(G|B) = \frac{1}{L_{burst}} \quad \text{und} \quad (3.12)$$

$$P(B|G) = \frac{P_{err}}{L_{burst} \cdot (1 - P_{err})} \quad (3.13)$$

berechnet.

Mit diesen Übergangswahrscheinlichkeiten wird ja nach Kanalzustand die Methode *GilbertElliotChannel::binaryEvent(double prob)* parameterisiert, die mit der

übergebenen Wahrscheinlichkeit ein „wahr“-Ereignis generiert und so das Umschalten in den jeweils anderen Zustand auslöst. Angewendet wird dies durch den Aufruf der Methode *GilbertElliotChannel::getState()*, welche einen neuen Zyklus für das zugrundeliegende binäre Markovmodell auslöst und das Ergebnis in der Form „1“ für den Kanalzustand „gut“ und „0“ für den Kanalzustand „schlecht“ zurückgibt.

3.1.2.5 Die Histogrammklasse.

Die Klasse *Histogramm* implementiert eine Histogrammfunktionalität, d.h. die Schätzung der Amplitudendichteverteilung über die relative Häufigkeit.

Zu diesem Zweck wird der durch den minimal/maximal möglichen Wert gegebene Wertebereich in *Bins* Intervalle zerlegt. Jeder mittels der Methode *GilbertElliotChannel::addValue(double x)* zugeführte Wert erhöht dann die absolute Häufigkeit seines Intervalles um 1.

Die relative Häufigkeit ergibt sich dann für jedes Intervall als der Wert für die absolute Häufigkeit, dividiert durch die Anzahl an zugeführten Werten insgesamt.

Die so geschätzte ADV kann mit dem Aufruf der Methode *GilbertElliotChannel::calculateHistogramm(double H[])* abgefragt werden.

Mittels dieser Schätzung der ADV kann die Entropie des Signals gemäß

$$\hat{H}(X) = (-1) \cdot \sum_{k=1}^{Bins} \hat{p}_k \cdot \log_2(\hat{p}_k) \quad (3.14)$$

geschätzt werden. Diese Schätzung wird durch den Aufruf der Methode *GilbertElliotChannel::calculateEntropie()* durchgeführt.

3.1.2.6 Die Implementierung der Transformationen.

Die Oberklasse aller verwendeten Transformationen ist *OrthoNormalLinearTransform*. Diese Klasse repräsentiert eine quadratische, orthonormale Transformation, deren inverse Transformation sich zu

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^H \cdot \mathbf{y} \quad (3.15)$$

ergibt. Direkte finale Unterklassen sind die Implementierungen der Einheitstransformation, der DCT (Klasse *DCT*) und der KLT (Klasse *KLT*).

Die nichtorthonormale CCT wird in der Klasse *CorrelatingTransform* implementiert. Sie ist eine finale Unterklasse der *SquareTransform*-Klasse. Diese Klasse ist eine Ableitung von *OrthoNormalLinearTransform*, in welcher die Methode für die

inverse Transformation durch die allgemeine inverse Transformationsgleichung

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_{inv.} \cdot \mathbf{y} \quad (3.16)$$

überschrieben worden ist.

Mittels dieser Vererbungsstruktur können alle Transformationsobjekte über die gemeinsame Basisklasse *OrthoNormalLinearTransform* referenziert werden. Die gewählte Vererbungsstruktur reduziert auch die Redundanzen im Programm-quelltext durch Wiederverwendung gemeinsamer Funktionalitäten.

3.2 Ergebnisse der Evaluierung an Videodaten

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse von Übertragungssimulationen mit dem vorgestellten Demonstrator/Evaluator vorgestellt.

Für die Übertragung wurde das Lena-Referenzbild verwendet, die Gilbert-Elliot-Kanäle wurden mit einer mittleren Fehlerbündellänge $L_{burst} = 5$ und einer mittleren Ausfallrate von $P_{err} = 10^{-2}$ parameterisiert. Für alle hier gezeigten Bilder wurde das gleiche Fehlermuster verwendet.



Abbildung 3.5: Resultate für die eindimensionale DCT, ohne (links, $pSNR_{dB} = 29,01$ dB) und mit (rechts, $pSNR_{dB} = 29,42$ dB) der optimalen Schätzlösung ($H = 4,95$ bpp).

Die Ergebnisse der Versuche in der Tabelle 3.1 zeigen den dramatischen Anstieg der Rekonstruktionsqualität bei zunehmender Nichtorthonormalität der CCT-Transformationen. Die Resultate in den Abbildungen 3.5-3.14 zeigen deutlich, daß die Verbesserung der Rekonstruktionsqualität nicht nur theoretischer Natur ist.



Abbildung 3.6: Resultate für die separierbare 2D-DCT, ohne (links, $pSNR_{dB} = 29,02$ dB) und mit (rechts, $pSNR_{dB} = 29,37$ dB) der optimalen Schätzlösung ($H = 2,34$ bpp).

Da die Ergebnisse einer einzelnen Übertragung statistisch nicht repräsentativ sind, wurden für Tabelle 3.2 eine Mittelung über 100 Übertragungssimulationen vorgenommen. Die Ergebnisse sind zudem in Abbildung 3.15 graphisch dargestellt.

Überraschend ist das gute Abschneiden der DST-Transformation hinsichtlich des $pSNR_{dB}$ -Gewinns durch Einsatz des Fehlerkorrekturverfahrens und der Umstand, daß die separierbare zweidimensionale DCT bei vergleichbarer Rekonstruktionsqualität eine deutlich geringere Entropierate erzielt, als die eindimensionale KLT.

Dies deutet schon auf das im Abschnitt 3.2.1 gewonnene Resultat hin, daß Bilddaten durch zweidimensionale Quellenmodelle besser beschrieben werden und somit durch explizit zweidimensionale Transformationen auch gewinnbringender transformiert werden können.

Das gute Abschneiden der DST gibt Anstoß zu den im Abschnitt 5.2 dargelegten Überlegungen, rein orthonormale Transformationen statt der CCT zu verwenden. Da orthonormale Transformationen Rotationsmatrizen sind, kann man durch unterschiedliche Rotationen von der KLT-Rotation bis zur Einheitsmatrix einen gedachten Kurvenzug in Abbildung 3.15 konstruieren, welcher die Punkte der separierbaren zweidimensionalen KLT bzw. DCT über die DST mit denen der Einheitstransformation verbindet.

Dieser Kurvenzug läge gerade für sehr geringe Raten günstiger als der der CCT, zudem würde man durch Verwendung orthonormaler Transformationen die im Abschnitt 4 beschriebenen Probleme beim Einsatz nichtorthonormaler Transfor-



Abbildung 3.7: Resultate für die eindimensionale DST, ohne (links, $pSNR_{dB} = 28,37$ dB) und mit (rechts, $SpNR_{dB} = 49,95$ dB) der optimalen Schätzlösung ($H = 5,83$ bpp).

mationen vermeiden.

Für die CCT spricht, daß sie gute Kompromisse zwischen Quellen- und Kanal-codierungsleistung erzielt. Schon bei der Erhöhung von $\varepsilon = 0$ auf $\varepsilon = 0,01$ verbessert sich der $pSNR_{dB}$ von 26,69 dB um 25,76 dB auf 52,45 dB, wobei die benötigte Rate nur von 4,37 Bit/Pixel um 0,17 Bit/Pixel auf 4,54 Bit/Pixel ansteigt.

Bei einer Erhöhung von $\varepsilon = 0$ auf $\varepsilon = 0,03$ verbessert sich der $pSNR_{dB}$ gegenüber der orthonormalen CCT um 31,13 dB auf 57,82 dB, wobei die Rate um 0,49 Bit/Pixel auf 4,86 Bit/Pixel ansteigt.

Für den größten simulierten ε -Wert von $\varepsilon = 0,2$ verbessert sich der $pSNR_{dB}$ gegenüber der orthonormalen CCT nur noch um 38,41 dB auf 65,1 dB, wobei die Rate um 2,39 Bit/Pixel auf 6,76 Bit/Pixel ansteigt.

Die größten Steigerungen ergeben sich, wie auch Abbildung 3.17 zeigt, für kleine Werte von ε . Schon ab $\varepsilon = 0,02$ tritt ein deutlicher Sättigungseffekt ein, der $pSNR_{dB}$ steigert sich mit weiter wachsendem ε deutlich geringer.

Somit ist für die simulierte Kanalsituation, welche in der Praxis schon einen recht schlechten Kanal bedeuten würde, ein $\varepsilon = 0,01$ und damit eine zusätzliche Redundanz von 0,17 Bit/Pixel völlig ausreichend, gerade wenn es sich um nur kurz sichtbare Einzelbilder eines Films handelt.

Abbildung 3.16 zeigt darüber hinaus, daß sich die zusätzliche Redundanz und damit Entropieerhöhung linear mit ε entwickelt. Dies erleichtert die Verwendung der CCT in Systemen, die zur Optimierung der Bitzuteilung entsprechende Re-



Abbildung 3.8: Resultate für die separierbare 2D-DST, ohne (links, $pSNR_{dB} = 28,05$ dB) und mit (rechts, $pSNR_{dB} = 48,14$ dB) der optimalen Schätzlösung ($H = 5,02$ bpp).

gelalgorithmen verwenden (*rate control loops*, s. [JN90]).

Für die eindimensionale KLT ergeben sich entsprechend Gleichung 2.117 keine Verbesserungen durch den Einsatz der Fehlerkorrektur, da diese optimal dekorrelierende Transformation als optimale Schätzmatrix ihre inverse Transformation besitzt.

Die leichte Verbesserung bei der separierbaren zweidimensionalen KLT deuten darauf hin, daß für natürliche Bilder der zugrundegelegte separierbare Ansatz nicht optimal ist (s. Abschnitt 1.3.1).

Die Resultate für die Einheitstransformation in Abbildung 3.11 zeigen, daß der Schätzalgorithmus als verallgemeinerte Wienerlösung sich auch zur Interpolation von als fehlerhaft erkannten Bildpunkten z.B. in der Rauschunterdrückung eignet.



Abbildung 3.9: Resultate für die eindimensionale KLT, ohne (links, $pSNR_{dB} = 23,78$ dB) und mit (rechts, $pSNR_{dB} = 23,78$ dB) der optimalen Schätzlösung ($H = 3,69$ bpp).



Abbildung 3.10: Resultate für die separierbare 2D-KLT, ohne (links, $pSNR_{dB} = 23,77$ dB) und mit (rechts, $pSNR_{dB} = 24,15$ dB) der optimalen Schätzlösung ($H = 3,69$ bpp).



Abbildung 3.11: Resultate für die Einheitstransformation, ohne (links, $pSNR_{dB} = 25,38$ dB) und mit (rechts, $SpNR_{dB} = 70,6$ dB) der optimalen Schätzlösung ($H = 7,26$ bpp).



Abbildung 3.12: Resultate für die CCT ($\varepsilon = 0.0$), ohne (links, $pSNR_{dB} = 29,18$ dB) und mit (rechts, $pSNR_{dB} = 29,56$ dB) der optimalen Schätzlösung ($H = 4,38$ bpp).



Abbildung 3.13: Resultate für die CCT ($\varepsilon = 0.02$), ohne (links, $pSNR_{dB} = 29,07$ dB) und mit (rechts, $pSNR_{dB} = 57,45$ dB) der optimalen Schätzlösung ($H = 4,71$ bpp).



Abbildung 3.14: Resultate für die CCT ($\varepsilon = 0.08$), ohne (links, $pSNR_{dB} = 27,62$ dB) und mit (rechts, $pSNR_{dB} = 62,23$ dB) der optimalen Schätzlösung ($H = 5,44$ bpp).

Transformation	Entropie $\hat{H} \left[\frac{\text{Bit}}{\text{Pixel}} \right]$		\mathbf{T}^{-1}	$pSNR_{dB}$	
	\hat{H}_y	$\hat{H}_x - \hat{H}_y$		Schätzer	Verbesserung
Einheitstr.	7,26	0	25,38	70,6	45,23
DCT_{1D}	4,95	2,31	29,01	29,42	0,41
$DCT_{sep.2D}$	2,34	4,92	29,02	29,37	0,36
DST_{1D}	5,83	1,43	28,37	49,95	21,58
$DST_{sep.2D}$	5,02	2,25	28,05	48,14	20,09
KLT_{1D}	3,69	3,57	23,78	23,78	0
$KLT_{sep.2D}$	2,81	4,45	23,77	24,15	0,38
$CCT_{\varepsilon=0}$	4,38	2,89	29,18	29,56	0,38
$CCT_{\varepsilon=0,02}$	4,71	2,55	29,07	57,45	28,37
$CCT_{\varepsilon=0,08}$	5,44	1,82	27,62	62,23	34,62

Tabelle 3.1: Numerische Resultate aus den Bildbeispielen für $P_{err} = 10^{-2}$ und $L_{burst=5}$ aus den Bildbeispielen in den Abbildungen 3.5 bis 3.14.

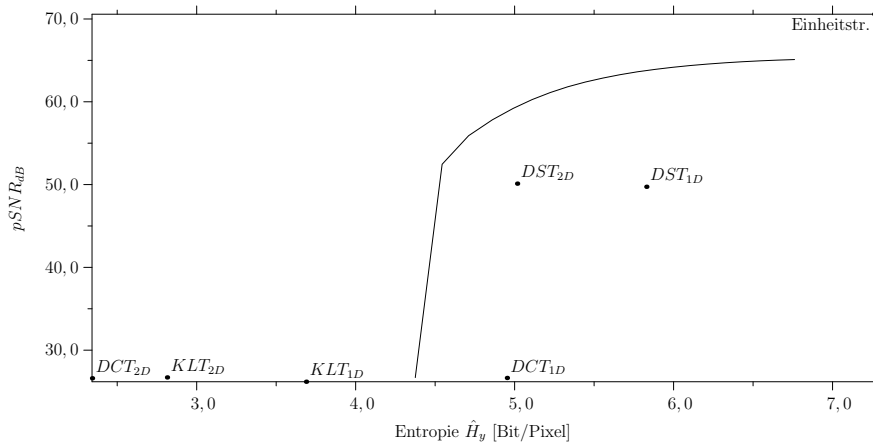


Abbildung 3.15: Über 100 Versuche gemittelte Ergebnisse der Evaluierung an Bilddaten für die Schätzlösung aus Gleichung 2.101.

Transformation	Entropie $\hat{H} \left[\frac{Bit}{Pixel} \right]$		\mathbf{T}^{-1}	$pSNR_{dB}$	
	\hat{H}_y	$\hat{H}_x - \hat{H}_y$		Schätzer	Verbesserung
Einheitstr.	7,262	0	25,557	70,576	45,019
DCT_{1D}	4,951	2,311	26,447	26,644	0,198
DCT_{2D}	2,342	4,92	26,466	26,605	0,14
DST_{1D}	5,829	1,433	26,125	49,734	23,609
DST_{2D}	5,016	2,246	26,055	50,113	24,058
KLT_{1D}	3,688	3,574	26,188	26,188	0
KLT_{2D}	2,813	4,449	26,188	26,708	0,52
$CCT_{\varepsilon=0}$	4,375	2,887	26,46	26,688	0,228
$CCT_{\varepsilon=0,01}$	4,544	2,719	26,436	52,453	26,017
$CCT_{\varepsilon=0,02}$	4,711	2,551	26,364	55,91	29,546
$CCT_{\varepsilon=0,03}$	4,86	2,402	26,249	57,823	31,574
$CCT_{\varepsilon=0,04}$	4,991	2,271	26,093	59,201	33,108
$CCT_{\varepsilon=0,05}$	5,11	2,152	25,899	60,265	34,365
$CCT_{\varepsilon=0,06}$	5,224	2,038	25,671	61,115	35,444
$CCT_{\varepsilon=0,07}$	5,334	1,928	25,41	61,81	36,4
$CCT_{\varepsilon=0,08}$	5,445	1,817	25,118	62,386	37,268
$CCT_{\varepsilon=0,09}$	5,556	1,706	24,797	62,868	38,071
$CCT_{\varepsilon=0,1}$	5,664	1,598	24,449	63,275	38,826
$CCT_{\varepsilon=0,11}$	5,772	1,49	24,076	63,621	39,545
$CCT_{\varepsilon=0,12}$	5,884	1,378	23,678	63,914	40,236
$CCT_{\varepsilon=0,13}$	5,994	1,268	23,258	64,164	40,906
$CCT_{\varepsilon=0,14}$	6,104	1,158	22,817	64,377	41,56
$CCT_{\varepsilon=0,15}$	6,215	1,047	22,356	64,557	42,201
$CCT_{\varepsilon=0,16}$	6,325	0,937	21,876	64,71	42,833
$CCT_{\varepsilon=0,17}$	6,434	0,828	21,38	64,838	43,458
$CCT_{\varepsilon=0,18}$	6,544	0,718	20,866	64,944	44,077
$CCT_{\varepsilon=0,19}$	6,653	0,609	20,338	65,031	44,692
$CCT_{\varepsilon=0,2}$	6,761	0,501	19,796	65,1	45,304

Tabelle 3.2: Gemittelte Simulationsergebnisse für $L_{burst} = 5$ und $P_{err} = 10^{-2}$ (100 Versuche).

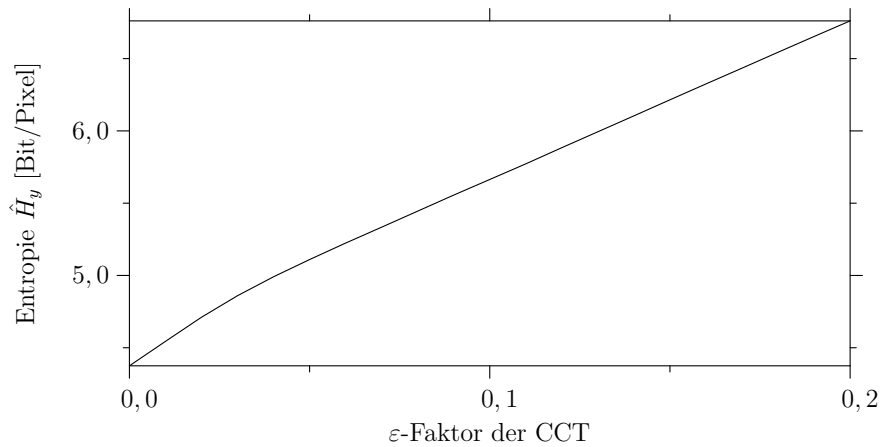


Abbildung 3.16: Entwicklung der Entropie i.A. von ε . Ergebnisse der Evaluierung an Bilddaten, gemittelt über 100 Versuche.

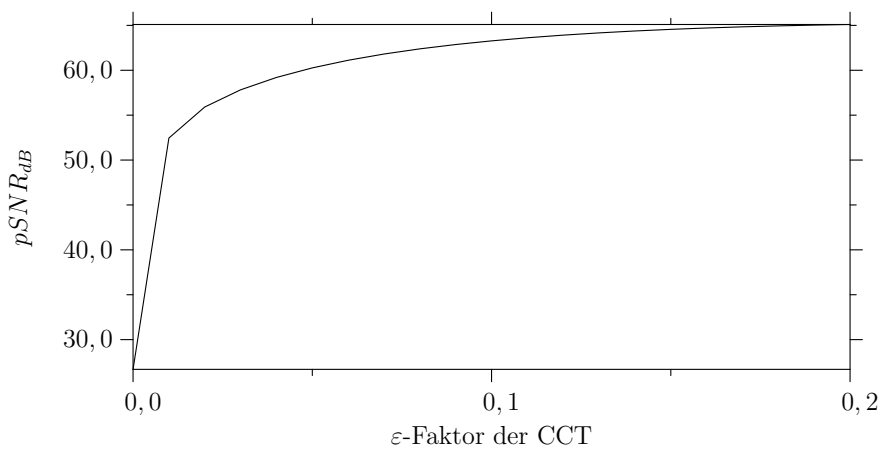


Abbildung 3.17: Entwicklung des $pSNR_{dB}$ i.A. von ε . Ergebnisse der Evaluierung an Bilddaten, gemittelt über 100 Versuche.

3.2.1 Verwendung generischer Quellenkorrelationsmatrizen.

Von besonderem Interesse für die Praxis ist die Frage, inwieweit die Quellenkorrelationsmatrix durch ein generisches Modell ersetzt und somit nicht explizit übertragen werden muß.

Untersucht werden die Eignung des eindimensionalen AR(1)-Modells gemäß Abschnitt 1.3.1 und der zweidimensionalen AR(1)-Modelle (isometrisch und separierbar) gemäß Abschnitt 1.3.2.

Für die Quellenkorrelation ϱ wird nach den Empfehlungen aus [Cla86] Werte im Bereich $\varrho = 0,96 \dots 0,98$ empfohlen. Auch die rechnerisch ermittelte (horizontale) Korrelation des verwendeten Lena-Bilds liegt mit $\varrho = 0,97726$ in diesem Bereich.

Zur Evaluation wurden die Intervallgrenzen des empfohlenen Bereichs, $\varrho = 0,96$ und $\varrho = 0,98$, verwendet.

Durchgeführt wird diese Evaluation über den automatisierten Ablauf „*Generic AR(1)*“ aus dem „*Automatic*“-Menü des Demonstrators.

ε	\hat{H} $\frac{\text{Bits}}{\text{Pixel}}$	$pSNR [dB]$					
		$\mathbf{T}_{inv.}$	\mathbf{R}_{xx}	1D AR(1)		2D sep. AR(1)	
				$\varrho = 0,96$	$\varrho = 0,98$	$\varrho = 0,96$	$\varrho = 0,98$
0	5,81	29,51	31,29	20,29	23,67	30,32	30,32
0,01	5,82	27,65	41,18	19,31	23,02	28,75	29,08
0,02	5,85	29,17	45,26	17,74	23,5	31,7	32,2
0,03	5,88	28,46	47,41	13,49	24,85	33,33	34,23
0,04	5,92	28,26	48,13	13	25,54	35,13	35,27
0,05	5,97	27,33	48,74	17,51	24,56	36,83	37,02
0,06	6,02	27,59	49,33	20,08	23,09	38,34	37,52
0,07	6,07	26,75	49,72	18,92	24,63	39,42	38,9
0,08	6,12	26,94	50,11	19,62	23,12	40,9	40,07
0,09	6,18	26,44	50,15	16,89	19,2	41,86	41,16
0,1	6,24	25,16	50,13	7,83	19,86	41,91	41,18

Tabelle 3.3: Ergebnisse der Evaluierung generischer Quellenkorrelationsmatrizen ($P_{err} = 10^{-2}$, $L_{burst} = 5$, gemittelt über 100 Versuche).

Die Ergebnisse sind in der Tabelle 3.3 numerisch und in Abbildung 3.18 graphisch dargestellt. Die Daten für $\mathbf{T}_{inv.}$ entsprechen dabei denen für eine Rekonstruktion ohne das Schätzverfahren bzw. mit der normalen inversen Transformation, die mit \mathbf{R}_{xx} gekennzeichneten Daten entstanden unter Verwendung der tatsächlichen Quellenkorrelationsmatrix.

Das leichte Abfallen der Kurve für \mathbf{T}^{-1} erklärt sich durch die schlechter werdenden Quellencodierungseigenschaften der CCT mit steigendem ε (s. Abschnitt 4.2).

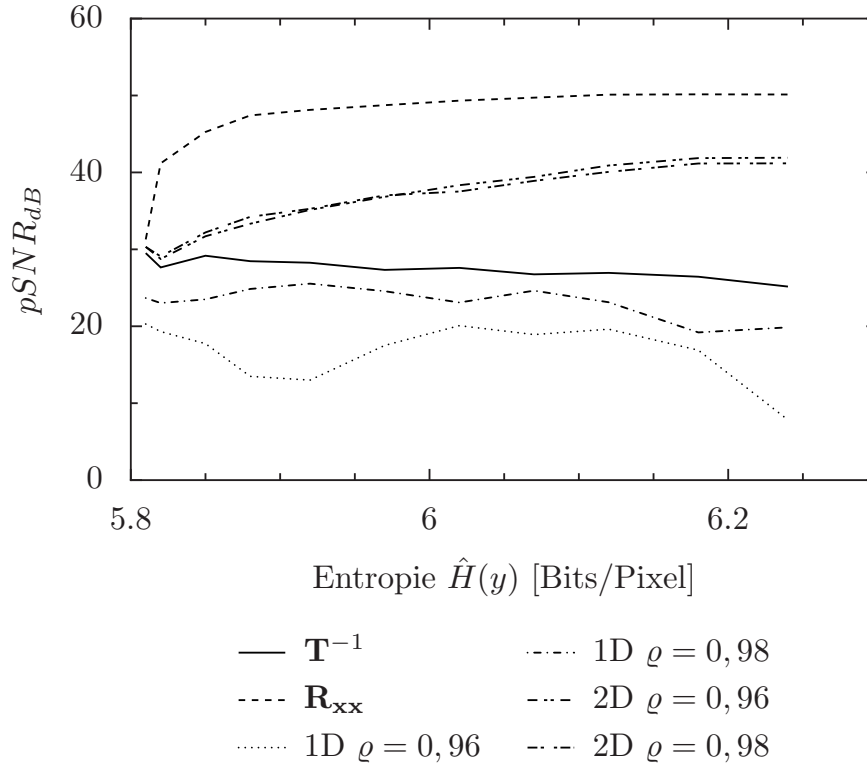


Abbildung 3.18: Ergebnisse der Evaluierung generischer Quellenkorrelationsmatrizen ($P_{err} = 10^{-2}$, $L_{burst} = 5$, gemittelt über 100 Versuche).

Die Ergebnisse zeigen deutlich die Unbrauchbarkeit des eindimensionalen AR(1)-Modells für die statistische Modellierung der Bilddaten. Die Rekonstruktionsergebnisse liegen unter denen der normalen inversen Transformation.

Das separierbare zweidimensionale AR(1)-Modell hingegen liefert als Schätzgrundlage deutlich bessere Ergebnisse als die normale inverse Transformation, die allerdings nicht an die Ergebnisse für die tatsächliche Autokorrelationsmatrix des Quellensignals heranreichen.

Die Wahl des exakten Werts für die Korrelation scheint bei diesem Modell recht unkritisch zu sein, da die Ergebnisse für $\varrho = 0,96$ und $\varrho = 0,98$ dicht beieinanderliegen.

Interessant ist auch der Vergleich zwischen dem isometrischen und dem separierbaren zweidimensionalen AR(1)-Modell als Schätzgrundlage. Deshalb wurde ein hinsichtlich der Kanaleinstellungen gleichparameterisierter Simulationslauf mit gleichem Umfang zwischen den Schätzungen auf der Basis dieser Modelle durchgeführt. Die Ergebnisse sind tabellarisch in Tabelle 3.4 aufgeführt und graphisch

in Abbildung 3.19 dargestellt.

ε	\hat{H} $\frac{\text{Bits}}{\text{Pixel}}$	$pSNR [dB]$					
		$\mathbf{T}_{inv.}$	\mathbf{R}_{xx}	2D iso. AR(1)		2D sep. AR(1)	
				$\varrho = 0,96$	$\varrho = 0,98$	$\varrho = 0,96$	$\varrho = 0,98$
0	5,81	28,33	30,01	29,53	29,55	29,07	29,05
0,01	5,82	27,79	40,26	31,06	32,99	28,94	29,28
0,02	5,85	28,67	45,28	36,26	39,21	31,43	32,12
0,03	5,88	28,13	46,98	39,45	42,19	33,01	33,59
0,04	5,92	27,54	48,19	41,58	43,85	34,88	35,53
0,05	5,97	27,64	48,76	43,48	45,19	36,88	36,9
0,06	6,02	26,93	49,32	44,71	46,1	38,37	37,98
0,07	6,07	26,98	49,65	45,76	46,59	39,71	38,81
0,08	6,12	26,26	49,9	46,16	46,88	40,47	39,67
0,09	6,18	25,37	49,95	46,4	47,04	41,03	40,24
0,1	6,24	26,05	50,1	46,67	47,06	42,04	41,27

Tabelle 3.4: Ergebnisse der Evaluierung von zweidimensionalen generischen AR(1)-Modellen ($P_{err} = 10^{-2}$, $L_{burst} = 5$, gemittelt über 100 Versuche).

Wenig überraschend schneidet das isometrische Quellenmodell bei dem natürlichen Lena-Bild deutlich besser ab als das eher für künstliche Bilder geeignete separierbare zweidimensionale AR(1)-Modell. Auch hat hier die Wahl von ϱ einen größeren Einfluß auf das Ergebnis. Insgesamt scheint das isometrische Modell für natürliche Bilder eine gute Wahl für die Quellenmodellierung zu sein.

3.3 Zusammenfassung der Evaluierung an Videodaten

Die in Gleichung 2.101 entwickelte Lösung bewirkt bei recht geringen Redundanzen beeindruckende Verbesserungen der Rekonstruktionsqualität nicht nur in objektiver sondern auch in perzeptueller Hinsicht.

Der für geringe Werte von ε nahezu lineare Zusammenhang zur Redundanzerrhöhung und Verbesserung in der Signalqualität erleichtert eine Anpassung an die Kanalsituation bei der gedachten Verwendung als *joint source channel*-Coder.

Allerdings ist für optimale Ergebnisse die genaue Kenntnis der Signalkorrelationsmatrix notwendig. In der Praxis sollte diese Signalkorrelationsmatrix aus dem bereits dekodierten Bildmaterial gewonnen werden, da bei Bewegtbildübertragung meist eine große Ähnlichkeit der Bilder innerhalb einer Szene vorzufinden ist. Die Beschreibung durch ein je nach Bildtyp separierbares oder isometrisches

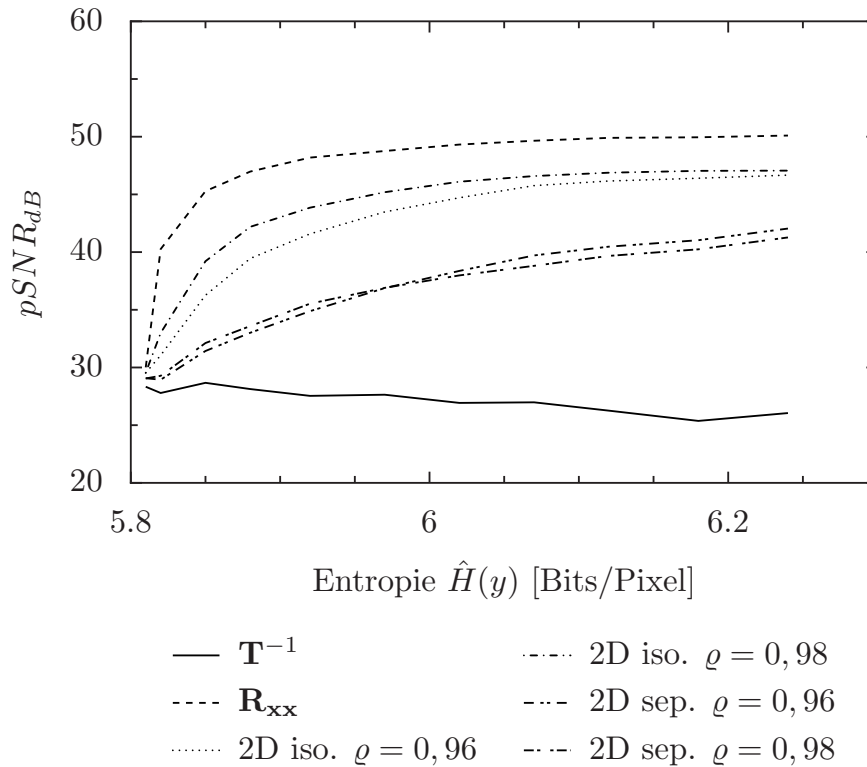


Abbildung 3.19: Ergebnisse der Evaluierung der zweidimensionalen generischer AR(1)-Modelle ($P_{err} = 10^{-2}$, $L_{burst} = 5$, gemittelt über 100 Versuche).

zweidimensionales AR(1)-Modell wäre aber ein guter Kompromiß, zumal auf dieser Basis für die schwerwiegendsten Fehler (Ausfall der tieffrequenten Transformationskoeffizienten) ein fester Satz an optimalen inversen Transformationsmatrizen abgeleitet werden kann.

Die praktische Evaluierung zeigt auch, das die Schätzlösung aus Gleichung 2.101 auch bei der orthonormalen DCT geringe Gewinne erzielt. Somit ist auch eine direkte Verwendung auf JPEG/MPEG-codierten Bilddaten denkbar, sei es als Fehlerschutz oder zur besseren Rekonstruktion aus quantisierten Transformationskoeffizienten.

Kapitel 4

Theoretische Evaluierung

4.1 Einleitung

Die theoretische Evaluierung soll die theoretischen Grenzen der Leistungsfähigkeit des erarbeiteten Ansatzes aufzeigen.

Für einen *joint source channel-Coder* beinhaltet der Aspekt der Leistungsfähigkeit zwei gegensätzliche Aspekte:

1. Der Aspekt der Quellencodierung bzw. der Datenkompression durch Einsparung von Redundanzen bzw. Irrelevanzen.
2. Der Aspekt der Kanalcodierung bzw. der Fehlerrobustheit durch Ausnutzung von Redundanzen bzw. Irrelevanzen.

Die Auftrennung ist schon aus praktischen Gründen sinnvoll. Den Sender, der von Übertragungsfehlern noch nichts wissen kann, interessiert vorwiegend der Quellencodierungsaspekt, d.h. die Frage, mit welcher Signalqualität das Signal gespeichert bzw. gesendet werden kann, wenn er eine bestimmte Bitrate investiert.

Empfängerseitig stellt sich die zusätzliche Frage, inwieweit Übertragungsfehler durch einige darüber hinaus aufgewendete Bits in ihren Auswirkungen korrigiert werden können, also die klassische Aufgabenstellung der Kanalcodierung.

Die getrennte Betrachtung der Quellen- und Kanalcodierungsfähigkeit der Lösung erlaubt auch einen Vergleich der Leistungsfähigkeit im „Normalbetrieb“ und im Fehlerfall.

Das zugrundegelegte Szenario entspricht dem aus Kapitel 3, mit dem Unterschied, daß statt Bündelfehlern ein gedächtnisloses Fehlermodell angenommen wird.

4.2 Der Quellencodierungsaspekt.

Die Kernfrage der Quellencodierung ist die Frage nach der Verzerrung $D(R)$, welche man in Kauf nehmen muß, wenn man das Signal mit einer bestimmten Datenrate R komprimiert repräsentieren möchte (s. [JN90]).

Die Beantwortung dieser Frage gestaltet sich für die CCT schwieriger als für die in [JN90] behandelten rein orthonormalen Transformationen, da zahlreiche vereinfachende mathematische Gegebenheiten, wie etwa die Energieerhaltung, nicht mehr vorausgesetzt werden können. Die dort angegebenen Formeln können somit nicht mehr ohne weiteres verwendet werden.

Aus diesem Grund soll $D(R)$ für die CCT zunächst am Beispiel des einfachen Falles $N = 2$ explizit hergeleitet werden. Mittels der so erarbeiteten Grundlagen soll die erhaltene Lösung dann für beliebige $N = 2^m$ verallgemeinert werden. Die Bilddaten werden dabei, wie in [Cla86] empfohlen, durch einen AR(1)-Prozeß modelliert.

4.2.1 Untersuchung für den Fall $N = 2$

Untersucht wird ein System, welches benachbarte Werte $\mathbf{x} = \{x[2n-1], x[2n]\}$ mittels der Transformation $\mathbf{y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}$ auf die Transformationskoeffizienten $y_0[2n]$ und $y_1[2n]$ abbildet. Diese werden nach der Quantisierung zu den quantisierten Transformationskoeffizienten $\hat{y}_0[2n]$ und $\hat{y}_1[2n]$, welche bei hinreichender Genauigkeit (s. [JN90]) als Addition eines Rauschsignals $q_{0/1}[n]$ modelliert werden können, über zwei getrennte Kanäle c_0 und c_1 zum Empfänger übertragen (s. Abbildung 4.1).

Dort werden sie durch die inverse Transformation $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{y}}$ in den Vektor der Rekonstruktionswerte $\hat{\mathbf{x}} = \{\hat{x}[2n-1], \hat{x}[2n]\}$ transformiert.

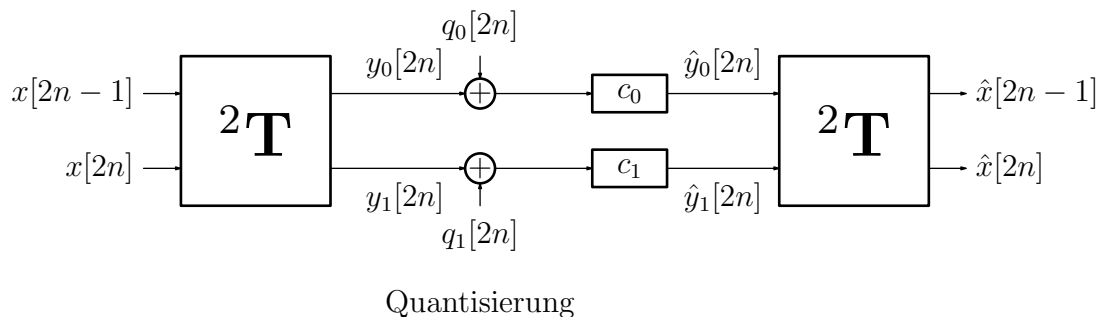


Abbildung 4.1: Signalzuordnung für die Untersuchung des Quellencodierungsaspekts im \mathbb{R}^2 .

Betrachtet wird das Differenzsignal $\mathbf{d} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ bzw. dessen Leistung $\sigma_d^2 = \mathbf{d}^H \cdot \mathbf{d}$

in Abhängigkeit von der für die Quantisierungen aufgewendeten Gesamtbitrate $R = R_1 + R_2$.

4.2.1.1 Annahme von gedächtnisfreien Quellensignalen

Als weitere Vereinfachung soll angenommen werden, daß die Signale $y_0[n]$ und $y_1[n]$ Signale von gedächtnisfreien Quellen mit gaußförmiger ADV sind. Nach [JN90] läßt sich für solche Signale der Zusammenhang zwischen Quantisierungsverzerrung D und aufgewendeter Rate R als

$$D(R)_G = 2^{-2R} \cdot \sigma_x^2 \quad (4.1)$$

angeben.

Unter der Annahme von statistisch unabhängigen Quantisierungsfehlern läßt sich deren Korrelationsmatrix im Transformationskoeffizientenbereich als

$$\mathbf{R}_{qq} = \begin{pmatrix} \sigma_{q_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{q_2}^2 \end{pmatrix} \text{ mit } \sigma_{q_{1/2}}^2 = \sigma_{y_{1/2}}^2 \cdot 2^{-2R_{1/2}} \quad (4.2)$$

schreiben. Da es sich bei der CCT um eine nicht-orthonormale Transformation handelt, muß dieser Quantisierungsfehler in den Ortsbereich zurücktransformiert werden. Unter der Annahme eines additiven Fehlermodells ergibt sich also

$$\mathbf{R}_{dd} = \mathbf{T}_{inv.} \cdot \mathbf{R}_{qq} \cdot \mathbf{T}_{inv.}^H \quad (4.3)$$

Setzt man für \mathbf{T} bzw. $\mathbf{T}_{inv.}$ die CCT an (die DCT und die KLT ergeben sich für $N = 2$ als Sonderfall für $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$)

$${}^2\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{1}{2\alpha} \\ -\alpha & \frac{1}{2\alpha} \end{pmatrix} \text{ und} \quad (4.4)$$

$${}^2\mathbf{T}_{inv.} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\alpha} & -\frac{1}{2\alpha} \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

erhält man für

$$\mathbf{R}_{dd} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{q_2}^2}{4\alpha^2} + \frac{\sigma_{q_1}^2}{4\alpha^2} & \frac{\sigma_{q_1}^2}{2} - \frac{\sigma_{q_2}^2}{2} \\ \frac{\sigma_{q_1}^2}{2} - \frac{\sigma_{q_2}^2}{2} & \sigma_{q_2}^2 \alpha^2 + \sigma_{q_1}^2 \alpha^2 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Wie in Abschnitt 4.2.1.2 gezeigt wird, sind die Elemente der Nebendiagonale bei optimaler Bitzuteilung 0. Somit ergibt die Spur von \mathbf{R}_{qq} den Gesamtquantisierungsfehler und damit die Verzerrung D im Zeitbereich

$$D(R_1, R_2) = \text{spur}(\mathbf{R}_{qq}), \quad (4.7)$$

womit sich

$$D(R_1, R_2) = (\sigma_{q_1}^2 + \sigma_{q_2}^2) \cdot \left(\frac{1}{4\alpha^2} + \alpha^2 \right) \quad (4.8)$$

$$= (\sigma_{q_1}^2 + \sigma_{q_2}^2) \cdot \kappa \quad (4.9)$$

ergibt. Betrachtet man mit $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ den orthonormalen Fall, so erhält man das erwartete Ergebnis $D(R_1, R_2) = \sigma_{q_1}^2 + \sigma_{q_2}^2$. Setzt man nun den Ausdruck für $\sigma_{q_{1/2}}^2$ aus Gleichung 4.2 ein, so erhält man

$$D(R_1, R_2) = \kappa \cdot (\sigma_{y_1}^2 \cdot 2^{-2R_1} + \sigma_{y_2}^2 \cdot 2^{-2R_2}) . \quad (4.10)$$

Die Varianzen der Transformationskoeffizienten ergeben sich aus der Hauptdiagonale von

$$\mathbf{R}_{yy} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_{xx} \cdot \mathbf{T}^H \quad (4.11)$$

Nach dem AR(1)-Modell ergibt sich

$$\mathbf{R}_{xx} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$$\Rightarrow \mathbf{R}_{yy} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{4\alpha^2} + \alpha^2 \right) + \rho & \left(\frac{1}{4\alpha^2} - \alpha^2 \right) \\ \left(\frac{1}{4\alpha^2} - \alpha^2 \right) & \left(\frac{1}{4\alpha^2} + \alpha^2 \right) - \rho \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

und somit

$$\sigma_{y_1}^2 = \kappa + \rho \text{ und} \quad (4.14)$$

$$\sigma_{y_2}^2 = \kappa - \rho . \quad (4.15)$$

Für den orthonormalen Fall ergeben sich mit $\kappa = 1$ wiederum die bekannten Ergebnisse $\sigma_{y_{1/2}}^2 = 1 \pm \rho$. Somit ergibt sich für die Verzerrung

$$D(R_1, R_2) = \kappa \cdot ((\kappa + \rho) \cdot 2^{-2R_1} + (\kappa - \rho) \cdot 2^{-2R_2}) . \quad (4.16)$$

Aus der Definition der mittleren Rate ergibt sich $R_2 = 2R - R_1$ und somit

$$D(R_1, R) = \kappa \cdot ((\kappa + \rho) \cdot 2^{-2R_1} + (\kappa - \rho) \cdot 2^{-2 \cdot (2R - R_1)}) \quad (4.17)$$

$$= \kappa \cdot ((\kappa + \rho) \cdot 2^{-2R_1} + (\kappa - \rho) \cdot 2^{-4R} \cdot 2^{2R_1}) . \quad (4.18)$$

Für die Distortion-Rate-Funktion muß nun die optimale Bitzuordnung erarbeitet werden. Diese ergibt sich für die Rate R_1 , für welche die Verzerrung minimal ist.

Der Ansatz lautet somit

$$\frac{dD(R_1, R)}{dR_1} \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.19)$$

$$\Rightarrow 0 \stackrel{!}{=} \kappa \cdot ((\kappa + \rho) \cdot (-2) \cdot \ln(2) \cdot 2^{-2R_1} + (\kappa - \rho) \cdot 2^{-4R} \cdot 2 \cdot \ln(2) \cdot 2^{2R_1}) \quad (4.20)$$

$$(\kappa + \rho) \cdot 2^{-2R_1} = (\kappa - \rho) \cdot 2^{-4R} \cdot 2^{2R_1} \quad (4.21)$$

$$2^{4R_1} = \frac{\kappa + \rho}{\kappa - \rho} \cdot 2^{4R} \quad (4.22)$$

$$4R_1 = \log_2 \left(\frac{\kappa + \rho}{\kappa - \rho} \right) + 4R \quad (4.23)$$

und damit schließlich

$$R_1 = R + \frac{1}{4} \cdot \log_2 \left(\frac{\kappa + \rho}{\kappa - \rho} \right) . \quad (4.24)$$

Diese Formel soll wiederum anhand des orthonormalen Falls ($\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \kappa = 1$) überprüft werden. Für diesen Fall ergibt Gleichung 4.24

$$R_1 = R + \frac{1}{4} \cdot \log_2 \left(\frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right) , \quad (4.25)$$

woraus sich mit den Gleichungen 4.14 und 4.15

$$R_1 = R + \frac{1}{4} \cdot \log_2 \left(\frac{\sigma_{y_1}^2}{\sigma_{y_2}^2} \right) \quad (4.26)$$

ergibt. Für orthonormale Transformationen gilt nach Formel 12.60 in [JN90] folgende Lösung

$$R_k = R + \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(\frac{\sigma_{y_k}^2}{\sqrt[N]{\prod_{l=0}^{N-1} \sigma_{y_l}^2}} \right) , \quad (4.27)$$

konkret für $N = 2$ also

$$R_1 = R + \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(\frac{\sigma_{y_1}^2}{\sqrt{\sigma_{y_1}^2 \cdot \sigma_{y_2}^2}} \right) \quad (4.28)$$

$$= R + \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(\frac{\sigma_{y_1}}{\sigma_{y_2}} \right) \quad (4.29)$$

$$= R + \frac{1}{4} \cdot \log_2 \left(\frac{\sigma_{y_1}^2}{\sigma_{y_2}^2} \right) , \quad (4.30)$$

was identisch zu der Lösung in Gleichung 4.24 ist.

Es ist hervorzuheben, daß sich die Lösung für die optimale Bitzuteilung nach Gleichung 4.24 auch dann ergibt, wenn man die Varianzen der Transformationskoeffizienten nach Gleichung 4.14 und 4.15 in die bekannte Lösung aus Gleichung 4.27 einsetzt:

$$R_{1/2} = R + \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(\frac{\sigma_{y_k}^2}{\sqrt{\sigma_{y_1}^2 \cdot \sigma_{y_2}^2}} \right), \quad (4.31)$$

woraus mit den Gleichungen 4.14 und 4.15 für R_1 folgt

$$R_1 = R + \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(\frac{\kappa + \rho}{\sqrt{(\kappa + \rho) \cdot (\kappa - \rho)}} \right) \quad (4.32)$$

$$= R + \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(\sqrt{\frac{\kappa + \rho}{\kappa - \rho}} \right) \quad (4.33)$$

$$= R + \frac{1}{4} \cdot \log_2 \left(\frac{\kappa + \rho}{\kappa - \rho} \right). \quad (4.34)$$

Setzt man diese Lösung nun in Gleichung 4.18 ein, erhält man die gesuchte Distortion-Rate-Funktion zu

$$D(R) = 2^{1-2 \cdot R} \cdot \kappa \cdot \sqrt{\kappa^2 - \rho^2} \quad (4.35)$$

bzw. umgerechnet auf die mittlere Verzerrung pro Koeffizient

$$D(R) = 2^{-2 \cdot R} \cdot \kappa \cdot \sqrt{\kappa^2 - \rho^2} \quad (4.36)$$

bzw. umgestellt zu Rate-Distortion-Lösung als

$$R(D) = \frac{1}{2} \cdot \left[\log_2 \left(\frac{\kappa \cdot \sqrt{\kappa^2 - \rho^2}}{D} \right) \right]. \quad (4.37)$$

Zur Verifizierung sollen wiederum die bekannten Ergebnisse für den orthonormalen Fall herangezogen werden. Da für $N = 2$ die orthonormale Transformation identisch zur KLT ist, kann Formel 12.91b aus [JN90] herangezogen werden:

$$\min\{\sigma_r^2\} = \epsilon^2 \cdot 2^{-2R} \cdot \left[\prod_{k=0}^{N-1} \lambda_k \right]^{\frac{1}{N}}, \quad (4.38)$$

wobei λ_k die Eigenwerte der Quellen-Kovarianzmatrix \mathbf{R}_{xx} sind. Für eine AR(1)-Quelle und $N = 2$ ergeben sich diese gemäß Gleichung 1.41 zu

$$\lambda_0 = 1 + \rho \text{ und } \lambda_1 = 1 - \rho. \quad (4.39)$$

Damit ist die minimale Verzerrung gegeben als

$$\min\{\sigma_r^2\} = \epsilon^2 \cdot 2^{-2R} \cdot \sqrt{(1-\rho) \cdot (1+\rho)} \quad (4.40)$$

$$= \epsilon^2 \cdot 2^{-2R} \cdot \sqrt{1-\rho^2}. \quad (4.41)$$

4.2.1.2 Gültigkeitsbereich von Gleichung 4.37.

Bei der Herleitung von Gleichung 4.37 wurde davon ausgegangen, dass das Quantisierungsfehlerspektrum weiß ist, also $\sigma_{q_1}^2 = \sigma_{q_2}^2$ gilt. Da der Quantisierungsfehler höchstens gleich der Varianz des zugehörigen Transformationskoeffizienten ist, kann diese Bedingung nur eingehalten werden, solange

$$\min\{\sigma_{y_k}^2\} \geq \sigma_q^2 \quad (4.42)$$

gilt. Mit Gleichung 4.15 und Gleichung 4.53 folgt

$$2^{-2R} \cdot \sqrt{\kappa^2 - \rho^2} \leq \kappa - \rho \quad (4.43)$$

$$2^{-2R} \leq \frac{\kappa - \rho}{\sqrt{(\kappa - \rho) \cdot (\kappa + \rho)}} = \sqrt{\frac{\kappa - \rho}{\kappa + \rho}} \quad (4.44)$$

$$\Rightarrow R \geq \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(\sqrt{\frac{\kappa + \rho}{\kappa - \rho}} \right) \quad (4.45)$$

$$R \geq \frac{1}{4} \cdot \log_2 \left(\frac{\kappa + \rho}{\kappa - \rho} \right). \quad (4.46)$$

4.2.1.3 Beweis der Gleichheit von $\sigma_{q_1}^2$ und $\sigma_{q_2}^2$

Die für die Formulierung von Gleichung 4.8 angenommene Gleichheit der Quantisierungsfehlervarianzen bei optimaler Bitzuweisung gilt, wie im Folgenden bewiesen wird, auch für den nichtorthonormalen Fall. Setzt man das Ergebnis der optimalen Bitzuweisung aus Gleichung 4.24 und $R_2 = 2R - R_1$ an, so ergibt sich

$$R_1 = R + \frac{1}{4} \cdot \log_2 \left(\frac{\kappa + \rho}{\kappa - \rho} \right) \quad \text{und} \quad (4.47)$$

$$R_2 = R - \frac{1}{4} \cdot \log_2 \left(\frac{\kappa + \rho}{\kappa - \rho} \right). \quad (4.48)$$

Eingesetzt in $\sigma_{q_{1/2}}^2 = \sigma_{y_{1/2}}^2 \cdot 2^{-2R_{1/2}}$, folgt

$$\sigma_{q_1}^2 = (\kappa + \rho) \cdot 2^{-2R - \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(\frac{\kappa + \rho}{\kappa - \rho} \right)} \quad (4.49)$$

$$\sigma_{q_2}^2 = (\kappa + \rho) \cdot 2^{-2R + \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(\frac{\kappa + \rho}{\kappa - \rho} \right)} \quad (4.50)$$

und somit

$$\sigma_{q_1}^2 = (\kappa + \rho) \cdot 2^{-2R} \cdot \sqrt{\frac{\kappa - \rho}{\kappa + \rho}} \text{ und} \quad (4.51)$$

$$\sigma_{q_1}^2 = (\kappa - \rho) \cdot 2^{-2R} \cdot \sqrt{\frac{\kappa + \rho}{\kappa - \rho}}. \quad (4.52)$$

woraus sich in beiden Fällen

$$\sigma_{q_{1/2}}^2 = 2^{-2R} \cdot \sqrt{\kappa^2 - \rho^2} \quad (4.53)$$

ergibt. Der bekannte Sachverhalt, daß bei optimaler Bitzuweisung das Spektrum des Quantisierungsfehlers konstant ist, bleibt demnach auch für nichtorthonormale Transformationen gültig.

4.2.1.4 Evaluierung der Ergebnisse für die Lösung im \mathbb{R}^2

Abbildung 4.2.1.4 zeigt den Verlauf der in Gleichung 4.36 erarbeiteten Distortion-Rate-Lösung für verschiedene Transformationen und der für Bildsignale typischen Quellenkorrelation von $\rho = 0,95$ unter Beachtung der für die Gültigkeit von Gleichung 4.36 nötigen Mindestrate nach Gleichung 4.46. Deutlich erkennbar ist die Erhöhung der Fehlervarianz bei steigender Nichtorthogonalität der Transformationen.

Die Gesamtvarianz des Transformationskoeffizientenvektors ist

$$\sigma_y^2 = \sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2 = \text{spur}(\mathbf{R}_{yy}), \quad (4.54)$$

woraus mit Gleichung 4.13

$$\sigma_y^2 = (\kappa + \rho) + (\kappa - \rho) = 2\kappa \quad (4.55)$$

wird. Die Varianz des Transformationskoeffizientenvektors steigt also mit wachsendem κ . Betrachtet man nun auch noch die Gesamtverzerrung

$$\sigma_d^2 = \text{spur}(\mathbf{R}_{dd}) \quad (4.56)$$

$$\mathbf{R}_{dd} = \mathbf{T}_{\text{inv.}} \cdot \mathbf{R}_{qq} \cdot \mathbf{T}_{\text{inv.}}^H \quad (4.57)$$

$$= \mathbf{T}_{\text{inv.}} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{q_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{q_2}^2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{T}_{\text{inv.}}^H \quad (4.58)$$

$$= \begin{pmatrix} (\sigma_{q_1}^2 + \sigma_{q_2}^2) \cdot \frac{1}{4\alpha^2} & \frac{(\sigma_{q_1}^2 - \sigma_{q_2}^2)}{2} \\ \frac{(\sigma_{q_1}^2 - \sigma_{q_2}^2)}{2} & \alpha^2 \cdot (\sigma_{q_1}^2 + \sigma_{q_2}^2) \end{pmatrix}, \quad (4.59)$$

dann ist die Spur dieser Matrix und somit die Gesamtfehlervarianz

$$\sigma_d^2 = (\sigma_{q_1}^2 + \sigma_{q_2}^2) \cdot \left(\frac{1}{4\alpha^2} + \alpha^2 \right) \quad (4.60)$$

$$= (\sigma_{q_1}^2 + \sigma_{q_2}^2) \cdot \kappa. \quad (4.61)$$

Paradoxerweise steigen die Varianzen sowohl bei der Hin- als auch bei der Rücktransformation. Dieses Paradoxum wurde schon im Abschnitt 2.1.3.1 aufgelöst. Man mag zudem einwenden, daß diese Gleichungen offensichtlich falsch sind, da bei $R = 0$ für die Quantisierungsfehler $\sigma_{q_{1/2}}^2 = \sigma_{y_{1/2}}^2$ gelten müssen und damit $\sigma_d^2 = \sigma_x^2$ gelten müsse.

Dies widerspricht aber dem Umstand, daß bei optimaler Bitzuweisung $\sigma_{q_k}^2 = \text{const.}$ ist. Dies kann aber nur so lange erfüllt werden, wie $\sigma_q^2 \leq \min\{\sigma_{y_k}^2\}$, was für $R = 0$ aber nicht mehr gelten kann, da für die nur leicht nichtorthogonale CCT weiterhin die Relation $\sigma_{y_1} \gg \sigma_{y_2}$ für $\rho \neq 0$ gilt.

Für den Fall, daß die Rate hoch genug für eine optimale Bitzuweisung ist, beschreibt die Korrelationsmatrix der Verzerrung \mathbf{R}_{dd} in Gleichung 4.57 wie bei der inversen Transformation die Leistung bei der Zurücktransformation auf den ersten Koeffizienten mit dem Faktor $\frac{1}{4\alpha^2}$ gedämpft und die Leistung des zweiten Koeffizienten mit α^2 verstärkt wird. In der Summe wird der Quantisierungsfehler aber im nichtorthonormalen Fall verstärkt, da κ für $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sein Minimum mit $\kappa = 1$ erreicht. Der Hintergrund dieser Verstärkung wurde im Abschnitt 2.1.3.1 beleuchtet.

Berücksichtigt man nun, daß bei optimaler Bitzuweisung der Quantisierungsfehler relativ zur Varianz des Transformationskoeffizienten umgekehrt proportional ist (die Transformationskoeffizienten mit der höchsten Leistung werden am besten aufgelöst), so wird ersichtlich, daß dies mit der Verstärkung/Absenkung der Leistungsanteile bei der inversen Transformation konträr läuft. Auch dieses Paradoxum ist ein Hinweis darauf, daß die Überlegungen für die Quantisierung von Transformationskoeffizienten orthonormaler Transformationen nicht einfach auf die nichtorthonormalen Transformationen abgebildet werden können. Allein der Umstand, daß die Quantisiererezellen im Ortsbereich keine N-dimensionalen Rechtecke, sondern Parallelogramme darstellen, verletzt oft die für die Herleitung der Optimalquantisierung gemachte Annahme, daß die ADV des Signals innerhalb der Quantisiererezelle näherungsweise konstant ist. In [WOVR01] wird deshalb empfohlen, die Quantisierung vor der Anwendung der Transformation durchzuführen.

Da die CCT aber als regulierbar optimale Transformation eingesetzt werden soll, muß von diesem Ansatz abgewichen werden, da ansonsten die Transformation nicht zur Irrelevanzreduktion ausgenutzt werden kann.

Für kleine Werte von ε und damit nur leicht nichtorthonormale Transformationen

sollte dies aber kein Hindernis sein.

In Abbildung 4.2.1.4 werden die orthogonale und die am stärksten nichtorthogonale Variante der in Abbildung 4.2.1.4 untersuchten CCT-Varianten bei verschiedenen Quellenkorrelationen gegenübergestellt. Aus dieser Abbildung wird leicht ersichtlich, daß die Abhängigkeit der Distortion-Rate-Kurven von der Quellenkorrelation ρ mit steigender Nichtorthogonalität sinkt. In Abbildung 4.2.1.4 ist zur besseren Verständlichkeit dieser Zusammenhang noch einmal für die Rate-Distortion-Kurve nach Gleichung 4.37 dargestellt.

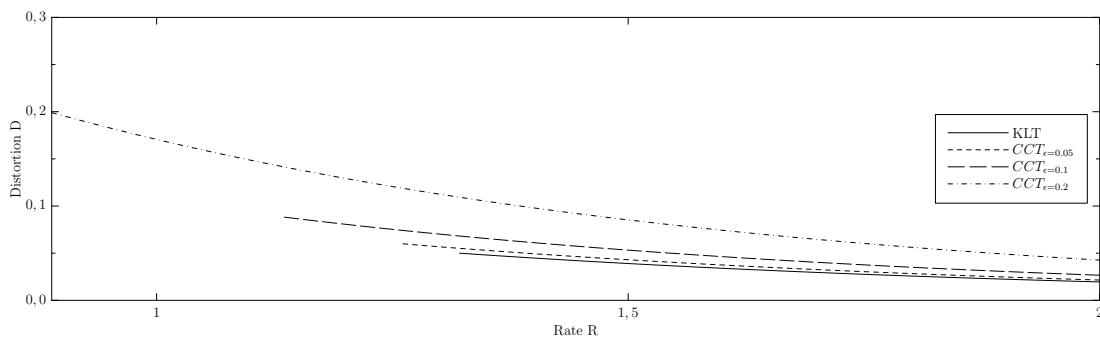


Abbildung 4.2: Distortion-Rate-Lösung aus Gleichung 4.36 für verschiedene Transformationen und der für Bildsignale typischen Quellenkorrelation von $\rho = 0,95$.

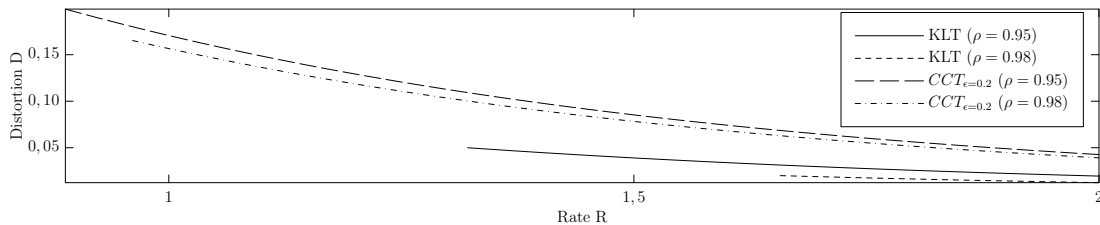


Abbildung 4.3: Distortion-Rate-Lösung aus Gleichung 4.36 für verschiedene Transformationen und Quellenkorrelationen.

4.2.2 Generelle Lösung

Die Verzerrung ist in unserem Modell der zurücktransformierte Quantisierungsfehler

$$\mathbf{d} = \mathbf{T}_{\text{inv.}} \cdot \mathbf{q}, \quad (4.62)$$

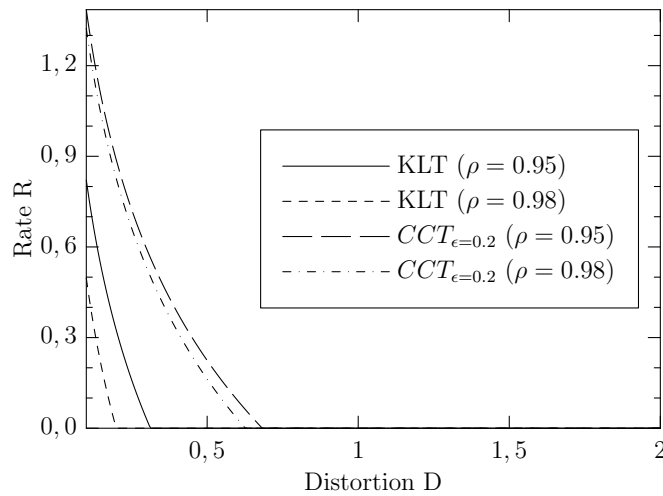


Abbildung 4.4: Rate-Distortion-Lösung aus Gleichung 4.37 für verschiedene Transformationen und Quellenkorrelationen.

dessen Erwartungswert die Gesamtverzerrung

$$D = E \{ \mathbf{d}^H \cdot \mathbf{d} \} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N \sigma_{d_k}^2 \quad (4.63)$$

$$\Rightarrow D = \frac{1}{N} \cdot \text{spur}(\mathbf{R}_{dd}) \quad (4.64)$$

ergibt.

Da bei optimaler Bitzuweisung die Korrelationsmatrix des Quantisierungsfehlers im Transformationskoeffizientenbereich eine Diagonalmatrix¹ der Form

$$\mathbf{R}_{\mathbf{q}\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \sigma_q^2(R) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_q^2(R) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_q^2(R) \end{pmatrix} = \sigma_q^2(R) \cdot \mathbf{I} \quad (4.65)$$

ist, ergibt sich die Korrelationsmatrix des zurücktransformierten Quantisierungsfehlers zu

$$\mathbf{R}_{dd} = \mathbf{T}_{inv.} \cdot \mathbf{R}_{qq} \cdot \mathbf{T}_{inv.}^H \quad (4.66)$$

$$= \sigma_q^2(R) \cdot \mathbf{T}_{inv.} \cdot \mathbf{T}_{inv.}^H \quad (4.67)$$

¹s. Abschnitt 4.2.1.2

Es läßt sich zeigen, daß das Matrixprodukt $\mathbf{T}_{inv.} \cdot \mathbf{T}_{inv.}^H$ immer eine Diagonalmatrix ergibt. Über die rekursive Definition der inversen Transformationsmatrix ergibt sich

$${}^{2N}\mathbf{T}_{inv.} = {}^2\mathbf{T}_{inv.} \otimes {}^N\mathbf{T}_{inv.} \quad (4.68)$$

und damit für das Matrixprodukt

$${}^{2N}\mathbf{T}_{inv.} \cdot {}^{2N}\mathbf{T}_{inv.}^H = ({}^2\mathbf{T}_{inv.} \otimes {}^N\mathbf{T}_{inv.}) \cdot ({}^2\mathbf{T}_{inv.} \otimes {}^N\mathbf{T}_{inv.})^H \quad (4.69)$$

$$= ({}^2\mathbf{T}_{inv.} \otimes {}^N\mathbf{T}_{inv.}) \cdot ({}^2\mathbf{T}_{inv.}^H \otimes {}^N\mathbf{T}_{inv.}^H) , \quad (4.70)$$

woraus sich mit $(A \otimes B) \cdot (C \otimes D) = AC \otimes BD$

$$= ({}^2\mathbf{T}_{inv.} \cdot {}^2\mathbf{T}_{inv.}^H) \otimes ({}^N\mathbf{T}_{inv.} \cdot {}^N\mathbf{T}_{inv.}^H) \quad (4.71)$$

ergibt.

Für den Fall $N = 2$ ergibt sich mit Gleichung 4.5

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2\alpha} & -\frac{1}{2\alpha} \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2\alpha} & -\frac{1}{2\alpha} \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}^H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\alpha^2} & 0 \\ 0 & 2\alpha^2 \end{pmatrix} . \quad (4.72)$$

Damit ist die Diagonalnatur von \mathbf{R}_{dd} rekursiv bewiesen, da das Kronecker-Produkt zweier Diagonalmatrizen wieder eine Diagonalmatrix ergibt. Die Gesamtverzerrung ist somit die Spur von \mathbf{R}_{dd} nach Gleichung 4.67

$$D(R) = \frac{1}{N} \cdot spur(\mathbf{R}_{dd}) \quad (4.73)$$

$$= \frac{1}{N} \cdot spur(\sigma_q^2(R) \cdot \mathbf{T}_{inv.} \cdot \mathbf{T}_{inv.}^H) \quad (4.74)$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sigma_q^2(R) \cdot spur(\mathbf{T}_{inv.} \cdot \mathbf{T}_{inv.}^H) , \quad (4.75)$$

woraus sich schließlich

$$D(R) = \frac{1}{N} \cdot \sigma_q^2(R) \cdot N \cdot \kappa_N \quad (4.76)$$

und damit

$$D(R) = \sigma_q^2(R) \cdot \kappa_N \quad (4.77)$$

ergibt. Die Größe κ_N ist dabei das Betragsquadrat eines der Basisvektoren der CCT N -ter Ordnung. Es läßt sich zeigen (s. A.2.3), daß sich κ_N gemäß

$$\kappa_N = \kappa_2^{\log_2(N)} \quad (4.78)$$

$$= \left(\frac{1}{4\alpha^2} + \alpha^2 \right)^{\log_2(N)} \quad (4.79)$$

berechnen läßt. Somit ergibt die vorläufige Gesamtformel

$$D(R) = \sigma_q^2(R) \cdot \left(\frac{1}{4\alpha^2} + \alpha^2 \right)^{\log_2(N)}. \quad (4.80)$$

Aus Gleichung 4.77 ist zu ersehen, daß die Verzerrung mit steigender Nichtorthonormalität ($\kappa \neq 1$) zunimmt. Gleichung 4.80 zeigt, daß der Proportionalitätsfaktor κ_N sowohl mit steigender Nichtorthogonalität $\alpha \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ zunimmt, als auch mit steigender Ordnung N der Transformation. Letzteres ist bei der kaskadierten Subband-Struktur der Transformation auch nicht anders zu erwarten.

Die Entwicklung von κ_N mit steigender Nichtorthonormalität ist für verschiedene N in Abbildung 4.2.2 dargestellt.

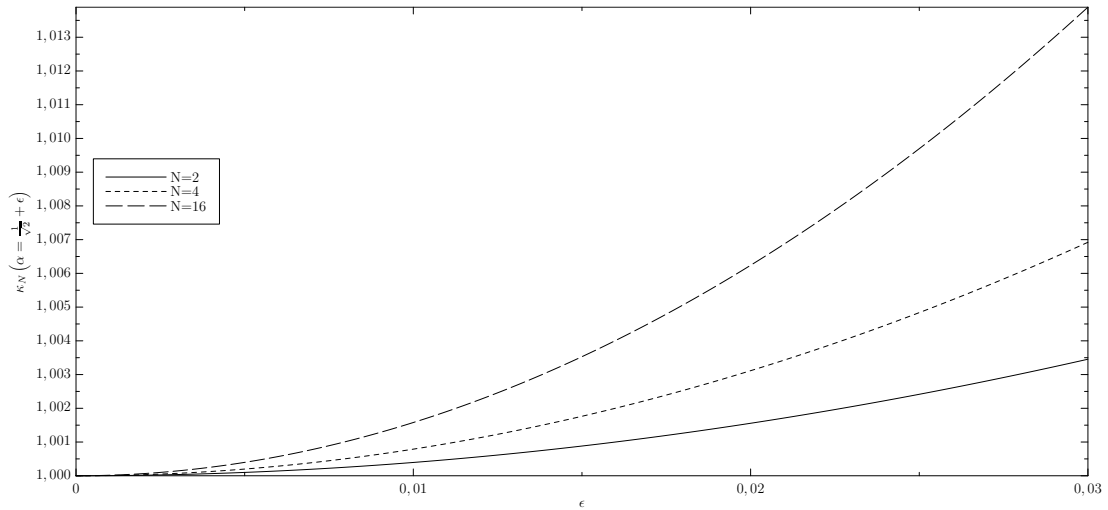


Abbildung 4.5: Entwicklung von $\kappa_N(\epsilon)$ nach Gleichung 4.78.

Gleichung 4.77 berücksichtigt allerdings nur die Einflüsse der Nichtorthogonalität auf die Rücktransformation; die Erhöhung der Varianzen der Transformationskoeffizienten nach der Hintransformation erhöhen gemäß

$$\sigma_q^2(R) = 2^{-2R_k} \cdot \sigma_{y_k}^2 \quad (4.81)$$

auch die Varianzen der Quantisierungsfehler auf den Kanälen. Diese Größe muß für den allgemeinen Fall noch hergeleitet werden, um die vollständige $D(R)$ -Lösung zu erhalten.

4.2.2.1 Berechnung von $\sigma_q^2(R)$ für $N = 2$

Die Berechnung von $\sigma_q^2(R)$ soll zunächst wieder für den Fall $N = 2$ erfolgen. Diese Berechnung soll nach der Rate-Distortion-Analyse aus [WOVR01] vorgenommen

werden, welche allerdings die inverse Transformation außer Acht läßt. In dieser Arbeit wird der Ansatz

$$\det(\mathbf{R}_{yy}) = \det(\mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_{xx} \cdot \mathbf{T}^H), \quad (4.82)$$

woraus mit $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$ ([Bar04])

$$\det(\mathbf{R}_{yy}) = \det(\mathbf{T}) \cdot \det(\mathbf{R}_{xx}) \cdot \det(\mathbf{T}^H) \quad (4.83)$$

folgt. Da die Determinante der CCT 1 ist (s. Abschnitt 2.1.1), ergibt sich mit $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^H)$

$$\det(\mathbf{R}_{yy}) = \det(\mathbf{R}_{xx}), \quad (4.84)$$

woraus sich mit den Gleichungen 4.12 und 4.13

$$\sigma_{y_1}^2 \cdot \sigma_{y_2}^2 - \left(\frac{1}{4\alpha^2} - \alpha^2 \right)^2 = 1 - \rho^2 \quad (4.85)$$

ergibt. Das Produkt der Transformationskoeffizienten ist von besonderem Interesse, da Gleichung 4.1 umgestellt nach

$$R_{1/2}(\sigma_q^2) = \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(\frac{\sigma_{y_{1/2}}^2}{\sigma_q^2} \right) + K \quad (4.86)$$

ergibt. Die Gesamtrate $2R = R_1 + R_2$ ist somit unter Vernachlässigung der Konstante K

$$2 \cdot R(\sigma_q^2) = \frac{1}{2} \cdot \left[\log_2 \left(\frac{\sigma_{y_1}^2}{\sigma_q^2} \right) + \log_2 \left(\frac{\sigma_{y_2}^2}{\sigma_q^2} \right) \right] \quad (4.87)$$

$$R(\sigma_q^2) = \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(\frac{\sqrt{\sigma_{y_1}^2 \cdot \sigma_{y_2}^2}}{\sigma_q^2} \right). \quad (4.88)$$

In [WOVR01] wurde der Fehler begangen, $\sigma_q^2(R)$ schon als Gesamtverzerrung anzusehen. Da der Quantisierungsfehler empfängerseitig mit einer nichtorthonormalen und damit nicht energiebewahrenden Transformation zurücktransformiert wird, ist dies nicht statthaft.

Allerdings erlaubt dieser Ansatz eine Formulierung von $\sigma_q^2(R)$, wenn in Gleichung 4.77 die nach dem Produkt der Transformationskoeffizienten umgestellte

Gleichung 4.85 eingesetzt wird

$$\sigma_{y_1}^2 \cdot \sigma_{y_2}^2 = 1 - \rho^2 + \left(\frac{1}{4\alpha^2} - \alpha^2 \right)^2 \quad (4.89)$$

$$= 1 - \rho^2 + \frac{1}{16\alpha^4} - \frac{2}{4} + \alpha^4 \quad (4.90)$$

$$= \alpha^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16\alpha^4} - \rho^2 \quad (4.91)$$

$$= \left(\alpha^2 + \frac{1}{4\alpha^2} \right)^2 - \rho^2 \quad (4.92)$$

$$= \kappa_{N=2}^2 - \rho^2 \quad (4.93)$$

$$\Rightarrow R(\sigma_q^2) = \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(\frac{\sqrt{\kappa_{N=2}^2 - \rho^2}}{\sigma_q^2} \right), \quad (4.94)$$

was umgestellt

$$\sigma_q^2(R) = 2^{-2R} \cdot (\kappa_{N=2}^2 - \rho^2) \quad (4.95)$$

ergibt. Eingesetzt in die bisherige Version der generellen Formel nach 4.77 ergibt sich

$$D(R) = \sigma_q^2(R) \cdot \kappa_{N=2} \quad (4.96)$$

$$= 2^{-2R} \cdot \kappa_{N=2} \cdot \left(\sqrt{\kappa_{N=2}^2 - \rho^2} \right) \quad (4.97)$$

und damit die gleiche Lösung wie in Gleichung 4.36.

4.2.2.2 Der generelle Lösungsalgorithmus

Verallgemeinert man den in [WOVR01] gegebenen Lösungsansatz für die Berechnung der Quantisiererfehlervarianz, so erhält man

$$R(\sigma_q^2) = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{\sqrt[N]{ \prod_{k=1}^N \sigma_{y_k}^2 }}{\sigma_q^2} \right). \quad (4.98)$$

Umgestellt nach σ_q^2 erhält man

$$\sigma_q^2(R) = 2^{-2R} \cdot \sqrt[N]{ \prod_{k=1}^N \sigma_{y_k}^2 } \quad (4.99)$$

und damit den unbekannten Teilterm aus Gleichung 4.77. Die Gesamtlösung lautet somit

$$D(R) = 2^{-2R} \cdot \kappa_N \cdot \sqrt{\prod_{k=1}^N \sigma_{y_k}^2} \quad (4.100)$$

$$D(R) = 2^{-2R} \cdot \left(\frac{1}{4\alpha^2} + \alpha^2 \right)^{\log_2(N)} \cdot \sqrt{\prod_{k=1}^N \sigma_{y_k}^2} \quad (4.101)$$

$$= 2^{-2R} \cdot \gamma(N, \alpha, \rho) . \quad (4.102)$$

Die Varianzen der Transformationskoeffizienten können unter der Vorgabe von N , ρ und α als Diagonale von

$$\mathbf{R}_{yy} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_{xx} \cdot \mathbf{T}^H \quad (4.103)$$

berechnet werden.

Mit Gleichung 4.102 läßt sich algorithmisch der Distortion-Rate-Zusammenhang und damit das Verhalten der CCT unter dem Gesichtspunkt der Quellencodierung angeben.

Der laut Gleichung 4.102 für die Distortion-Rate-Lösung wichtige γ -Faktor der CCT berechnet sich nach Gleichung 4.100 zu

$$\gamma_{CCT}(N, \varrho, \epsilon) = \left(\frac{1}{4\alpha^2} + \alpha^2 \right)^{\log_2(N)} \cdot \sqrt{\prod_{k=1}^N \sigma_{y_k}^2} . \quad (4.104)$$

Da laut [JN90] der Distortion-Rate-Zusammenhang für orthonormale Transformationen

$$D(R) = 2^{-2R} \cdot \left[\prod_{k=0}^{N-1} \sigma_{y_k}^2 \right]^{\frac{1}{N}} \quad (4.105)$$

ist, kann für die orthonormalen Transformationen ein äquivalenter γ -Faktor

$$\gamma_{ortho}(N, \rho) = \left[\prod_{k=0}^{N-1} \sigma_{y_k}^2 \right]^{\frac{1}{N}} \quad (4.106)$$

formuliert werden.

Mit diesen γ -Faktoren läßt sich der Distortion-Rate-Zusammenhang für die CCT und die orthonormalen Transformationen mit der einheitlichen Formel

$$D(R, \gamma) = 2^{-2R} \cdot \gamma \quad (4.107)$$

darstellen. Somit ergibt sich das Verhältnis der Verzerrungen zweier Transformationen bei gleicher Rate R zu

$$\frac{D(R, \gamma_1)}{D(R, \gamma_2)} = \frac{2^{-2R} \cdot \gamma_1}{2^{-2R} \cdot \gamma_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \quad (4.108)$$

Hinsichtlich der Quellenkodierungsleistung können zwei Transformationen also hinsichtlich ihrer γ -Faktoren verglichen werden.

Der γ -Faktor hängt eng mit dem Transformationsgewinn G_{TC} zusammen. Aus Abschnitt 1.1.1.7 folgt für orthonormale Transformationen

$$G_{TC} = \frac{\sigma_{d,PCM}^2}{\sigma_{d,TC_{orthon.}}^2} \Rightarrow \sigma_{d,TC_{orthon.}}^2 \hat{=} D_{orthon.}(R) = \frac{\sigma_{d,PCM}^2}{G_{TC}}. \quad (4.109)$$

Mit $\sigma_{d,PCM}^2 = 2^{-2R} \cdot \sigma_x^2$ (s. Abschnitt 1.1.1.7) ergibt sich

$$D_{orthon.}(R) = \frac{2^{-2R} \cdot \sigma_x^2}{G_{TC}}, \quad (4.110)$$

woraus mit der Definition des Transformationsgewinns nach Gleichung 1.94

$$D_{orthon.}(R) = \frac{2^{-2R} \cdot \sigma_x^2}{\frac{\frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{y_k}^2}{N \sqrt{\prod_{l=0}^{N-1} \sigma_{y_l}^2}}} \quad (4.111)$$

wird. Da orthonormale Transformationen lt. Beweis A.2.2 energiebewahrend sind, gilt für diese

$$N \cdot \sigma_x^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{y_k}^2 \quad (4.112)$$

und damit letztendlich für orthonormale Transformationen

$$\Rightarrow D_{orthon.}(R) = 2^{-2R} \cdot \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2} \cdot N \sqrt{\prod_{l=0}^{N-1} \sigma_{y_l}^2} \quad (4.113)$$

$$= 2^{-2R} \cdot \gamma_{orthon.} \quad (4.114)$$

Für die nichtorthonormale CCT muß noch die Leistungsverstärkung um κ_N von σ_y^2 und damit auch der Quantisierungsfehler $2^{-2R_k} \cdot \sigma_{y_k}^2$ eingerechnet werden, so daß sich für diese

$$\Rightarrow D_{CCT_\varepsilon}(R) = 2^{-2R} \cdot \kappa_N \cdot \sqrt[N]{\prod_{l=0}^{N-1} \sigma_{y_l}^2} \quad (4.115)$$

$$= 2^{-2R} \cdot \gamma_{CCT_\varepsilon}. \quad (4.116)$$

Damit läßt sich für die CCT ein wirkungsäquivalenter Transformationsgewinn

$$G_{TC, CCT_\varepsilon} = \frac{\frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{y_k}^2}{\kappa_N \cdot \sqrt[N]{\prod_{l=0}^{N-1} \sigma_{y_l}^2}} \quad (4.117)$$

formulieren.

Wiederum gelten die obigen Überlegungen nur, solange der bei optimaler Bitzuweisung konstante Quantisierungsfehler σ_q^2 kleiner ist als die kleinste Transformationskoeffizientenvarianz $\sigma_{y_k}^2$, da ansonsten dieses Kriterium der optimalen Bitzuweisung nicht aufrechterhalten werden kann. Daraus folgt die Bedingung

$$\sigma_q^2 = \sigma_x^2 \cdot \gamma(N, \varrho, \epsilon) \cdot 2^{-2R} \leq \min \{ \sigma_{y_k}^2 \} \quad (4.118)$$

(s. Abschnitt 4.2.1.2). Daraus folgt mit $\sigma_x^2 \stackrel{!}{=} 1$ eine Mindestrate von

$$R_{min} = \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(\frac{\gamma(N, \varrho, \epsilon)}{\min \{ \sigma_{y_k}^2 \}} \right). \quad (4.119)$$

4.2.3 Evaluierung der Quellencodierungsleistung

Die Ergebnisse der Evaluierung sind für die Transformationsgrößen $N = 16$ und $N = 64$ sowie der Quellenkorrelationen $\varrho = 0,96$ und $\varrho = 0,98$ in den Tabellen 4.1 bis 4.4 enthalten. Die N^2 -CCT wird gemäß den Überlegungen zu Gleichung 2.124 als gleichzeitige eindimensionale N^2 -Transformation wie auch als separierbare zweidimensionale $N \times N$ Transformation verwendet.

Die Erstellung dieser Tabellen und Diagramme ist eine Teilleistung des C++-Programms *QuellenGesamtEval*, welches zudem die Tabellen und Diagramme der Evaluierung der Gesamtbilanz erstellt.

In der Tabelle 4.3 sind die Daten des für die Bildsignalverarbeitung wichtigen Szenario einer Transformationsgröße von $N = 64$ (entspricht einer separierten $8 \times$

AR(1) Typ	Transformation	γ -Faktor	$\gamma/\gamma_{DCT_{sep. 2D}}$	R_{min}
1D	KLT_{1D}	0.092	4.2	1.1
1D	DCT_{1D}	0.092	4.2	1.1
1D	DST_{1D}	0.15	6.6	1.4
1D	$CCT_{\epsilon=0.00}$	0.12	5.6	0.91
1D	$CCT_{\epsilon=0.01}$	0.13	5.7	0.86
1D	$CCT_{\epsilon=0.02}$	0.13	5.9	0.83
1D	$CCT_{\epsilon=0.10}$	0.22	10	1.1
1D	$CCT_{\epsilon=0.20}$	0.63	29	1.5
1D	$CCT_{\epsilon=0.40}$	7.7	$3.5 \cdot 10^2$	2.4
sep. 2D	KLT_{1D}	0.022	1	2.6
sep. 2D	$KLT_{sep. 2D}$	0.022	1	2.6
sep. 2D	DCT_{1D}	0.055	2.5	2.9
sep. 2D	$DCT_{sep. 2D}$	0.022	1	2.6
sep. 2D	DST_{1D}	0.13	5.8	1.7
sep. 2D	$DST_{sep. 2D}$	0.052	2.4	3.1
sep. 2D	$CCT_{\epsilon=0.00}$	0.027	1.2	2.1
sep. 2D	$CCT_{\epsilon=0.01}$	0.027	1.2	2
sep. 2D	$CCT_{\epsilon=0.02}$	0.028	1.3	2
sep. 2D	$CCT_{\epsilon=0.10}$	0.07	3.2	2.5
sep. 2D	$CCT_{\epsilon=0.20}$	0.31	14	3
sep. 2D	$CCT_{\epsilon=0.40}$	5.8	$2.7 \cdot 10^2$	3.1

Tabelle 4.1: Gammafaktoren und Mindestraten für eine Transformationsbreite $N = 16$ und eine Quellenkorrelation $\rho = 0.96$.

8-Transformation) und einer Quellenkorrelation von $\rho = 0,96$ enthalten (Daten für ein separierbares zweidimensionales AR(1)-Quellenmodell).

Diesen Daten kann man entnehmen, daß mit den Überlegungen für Gleichung 4.108 die orthonormale CCT bei gleicher Rate eine um den Faktor $\frac{0,018}{0,012} = 1,5$ höhere Verzerrung gegenüber der KLT bzw DCT ergibt.

Betrachtet man die Zunahme der Verzerrung mit steigender Nichtorthonormalität, so erhält man bei gleicher Rate und $\rho = 0,96$ für $\epsilon = 0,02$ eine Zunahme der Verzerrung gegenüber der KLT/DCT um den Faktor $\frac{0,019}{0,012} = 1,58$, für $\epsilon = 0,1$ schon eine Zunahme um $\frac{0,052}{0,012} = 4,33$ und bei $\epsilon = 0,2$ bereits um den Faktor $\frac{0,31}{0,012} = 25,83$.

Die Abnahme der Quellencodierungsleistung der CCT mit wachsendem ϵ ist ebenfalls in Abbildung 4.6 dargestellt.

Für die separierbare DST liegt der γ -Quotient in diesem Szenario bei $\frac{0,033}{0,012} = 2,75$ und damit zwischen einer $CCT_{\epsilon=0,01}$ und einer $CCT_{\epsilon=0,02}$ -Transformation.

AR(1) Typ	Transformation	γ -Faktor	$\gamma/\gamma_{DCT_{sep. 2D}}$	R_{min}
1D	KLT_{1D}	0.048	6.1	1.1
1D	DCT_{1D}	0.049	6.1	1.1
1D	DST_{1D}	0.099	13	1.6
1D	$CCT_{\varepsilon=0.00}$	0.067	8.4	0.92
1D	$CCT_{\varepsilon=0.01}$	0.068	8.6	0.87
1D	$CCT_{\varepsilon=0.02}$	0.071	9	0.9
1D	$CCT_{\varepsilon=0.10}$	0.14	17	1.2
1D	$CCT_{\varepsilon=0.20}$	0.44	55	1.8
1D	$CCT_{\varepsilon=0.40}$	6.4	$8.1 \cdot 10^2$	2.7
sep. 2D	KLT_{1D}	$7.9 \cdot 10^{-3}$	1	2.9
sep. 2D	$KLT_{sep. 2D}$	$7.9 \cdot 10^{-3}$	1	2.9
sep. 2D	DCT_{1D}	0.026	3.3	3.4
sep. 2D	$DCT_{sep. 2D}$	$7.9 \cdot 10^{-3}$	1	2.9
sep. 2D	DST_{1D}	0.087	11	1.8
sep. 2D	$DST_{sep. 2D}$	0.026	3.3	3.6
sep. 2D	$CCT_{\varepsilon=0.00}$	$9.6 \cdot 10^{-3}$	1.2	2.3
sep. 2D	$CCT_{\varepsilon=0.01}$	$9.9 \cdot 10^{-3}$	1.2	2.3
sep. 2D	$CCT_{\varepsilon=0.02}$	0.011	1.4	2.3
sep. 2D	$CCT_{\varepsilon=0.10}$	0.039	4.9	3.1
sep. 2D	$CCT_{\varepsilon=0.20}$	0.22	28	3.4
sep. 2D	$CCT_{\varepsilon=0.40}$	5.2	$6.6 \cdot 10^2$	3.3

Tabelle 4.2: Gammafaktoren und Mindestraten für eine Transformationsbreite $N = 16$ und eine Quellenkorrelation $\varrho = 0.98$.

Die eindimensionale und die zweidimensionale separierbare KLT erreichen in diesem Szenaria die gleichen Ergebnisse wie die separierbare zweidimensionale DCT.

Tabelle 4.3 zeigt auch, daß für separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellen mit einem Korrelationsfaktor $\varrho = 0,96$ die separierbare zweidimensionale 8×8 -DCT bei gleicher Rate R eine um den Faktor 3,4 geringere Verzerrung erzielt als die Anwendung der eindimensionalen DCT auf die verketteten Zeilenvektoren der 8×8 -Makroblöcke. Steigt die Quellenkorrelation auf einen für Bilder ebenfalls nicht untypischen Wert von $\varrho = 0,98$, so beträgt dieser Faktor gemäß Tabelle 4.4 bereits 5,1.

Auffallend ist, daß das γ -Verhältnis für die zweidimensionale separierbare DST bei der Steigerung von $\varrho = 0,96$ zu $\varrho = 0,98$ von 2,8 auf 4,6 anwächst, während dieses Verhältnis für die orthogonale CCT mit 1,5 gleich bleibt.

Evaluiert man den Einfluß der Transformationsgröße für separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellen mit einem Korrelationsfaktor $\varrho = 0,96$ und separierbare zweidimensionale Transformationen in den Tabellen 4.1 und 4.3, so ergeben sich

AR(1) Typ	Transformation	γ -Faktor	$\gamma/\gamma_{DCT_{sep. 2D}}$	R_{min}
1D	KLT_{1D}	0.082	7	1
1D	DCT_{1D}	0.082	7	1
1D	DST_{1D}	0.1	8.6	1.2
1D	$CCT_{\varepsilon=0.00}$	0.12	10	1.1
1D	$CCT_{\varepsilon=0.01}$	0.12	10	0.93
1D	$CCT_{\varepsilon=0.02}$	0.13	11	0.81
1D	$CCT_{\varepsilon=0.10}$	0.24	21	1.1
1D	$CCT_{\varepsilon=0.20}$	0.97	83	1.7
1D	$CCT_{\varepsilon=0.40}$	31	$2.6 \cdot 10^3$	2.9
sep. 2D	KLT_{1D}	0.012	0.99	2.3
sep. 2D	$KLT_{sep. 2D}$	0.012	0.99	2.3
sep. 2D	DCT_{1D}	0.04	3.4	2.8
sep. 2D	$DCT_{sep. 2D}$	0.012	1	2.4
sep. 2D	DST_{1D}	0.065	5.6	2.6
sep. 2D	$DST_{sep. 2D}$	0.033	2.8	3
sep. 2D	$CCT_{\varepsilon=0.00}$	0.018	1.5	1.8
sep. 2D	$CCT_{\varepsilon=0.01}$	0.018	1.5	1.8
sep. 2D	$CCT_{\varepsilon=0.02}$	0.019	1.6	1.7
sep. 2D	$CCT_{\varepsilon=0.10}$	0.052	4.4	2.3
sep. 2D	$CCT_{\varepsilon=0.20}$	0.31	26	3
sep. 2D	$CCT_{\varepsilon=0.40}$	17	$1.5 \cdot 10^3$	4.1

Tabelle 4.3: Gammafaktoren und Mindestraten für eine Transformationsbreite $N = 64$ und eine Quellenkorrelation $\varrho = 0.96$.

die in Tabelle 4.5 aufgeführten γ -Faktoren.

Aus diesen Tabellendaten ist ersichtlich, daß die Steigerung der Transformationsbreite von $N = 16$ auf $N = 64$ bei gleicher Rate R die Verzerrung bei der KLT und der DCT halbieren würde, bei der DST und der orthogonalen CCT würde sie um den Faktor $\approx 2/3$ sinken, für die $CCT_{\varepsilon=0.02}$ ergeben sich keine Änderungen.

Der Vergleich der γ -Faktoren zwischen den Ergebnissen der orthonormalen Transformationen für eindimensionale AR(1)-Quellen und denen für separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellensignale bestätigt mit $G_{TC, orthon.} = \sigma_x^2/\gamma_{orthon.}$ Gleichung 1.130, wonach für separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellen bedeutend höhere Transformationsgewinne möglich sind als für eindimensionale AR(1)-Quellen bei gleichem ϱ -Faktor.

AR(1) Typ	Transformation	γ -Faktor	$\gamma/\gamma_{DCT_{sep. 2D}}$	R_{min}
1D	KLT_{1D}	0.042	12	1
1D	DCT_{1D}	0.042	12	1
1D	DST_{1D}	0.063	18	1.3
1D	$CCT_{\varepsilon=0.00}$	0.064	18	1
1D	$CCT_{\varepsilon=0.01}$	0.065	18	0.84
1D	$CCT_{\varepsilon=0.02}$	0.068	19	0.87
1D	$CCT_{\varepsilon=0.10}$	0.14	40	1.2
1D	$CCT_{\varepsilon=0.20}$	0.62	$1.7 \cdot 10^2$	1.9
1D	$CCT_{\varepsilon=0.40}$	23	$6.7 \cdot 10^3$	3.2
sep. 2D	KLT_{1D}	$3.5 \cdot 10^{-3}$	1	2.5
sep. 2D	$KLT_{sep. 2D}$	$3.5 \cdot 10^{-3}$	1	2.5
sep. 2D	DCT_{1D}	0.018	5.1	3.2
sep. 2D	$DCT_{sep. 2D}$	$3.5 \cdot 10^{-3}$	1	2.5
sep. 2D	DST_{1D}	0.041	12	2.5
sep. 2D	$DST_{sep. 2D}$	0.016	4.6	3.5
sep. 2D	$CCT_{\varepsilon=0.00}$	$5.5 \cdot 10^{-3}$	1.5	1.9
sep. 2D	$CCT_{\varepsilon=0.01}$	$5.6 \cdot 10^{-3}$	1.6	1.9
sep. 2D	$CCT_{\varepsilon=0.02}$	$6.1 \cdot 10^{-3}$	1.7	1.9
sep. 2D	$CCT_{\varepsilon=0.10}$	0.022	6.4	2.7
sep. 2D	$CCT_{\varepsilon=0.20}$	0.18	50	3.6
sep. 2D	$CCT_{\varepsilon=0.40}$	14	$3.9 \cdot 10^3$	4.5

Tabelle 4.4: Gammafaktoren und Mindestraten für eine Transformationsbreite $N = 64$ und eine Quellenkorrelation $\varrho = 0.98$.

Transformation	$\gamma_{N=16}$	$\gamma_{N=64}$	$\frac{\gamma_{N=64}}{\gamma_{N=16}}$
$KLT_{sep. 2D}$	0.022	0.012	0.53
$DCT_{sep. 2D}$	0.022	0.012	0.53
$DST_{sep. 2D}$	0.052	0.033	0.63
$CCT_{\varepsilon=0,0}$	0.027	0.018	0.67
$CCT_{\varepsilon=0,02}$	0.028	0.019	0.67
$CCT_{\varepsilon=0,2}$	0.31	0.31	1

Tabelle 4.5: Einfluß der Transformationsgröße N auf das γ -Verhältnis für separierbare zweidimensionale Transformationen und separierbare zweidimensionale AR(1)-Daten mit $\varrho = 0,96$.

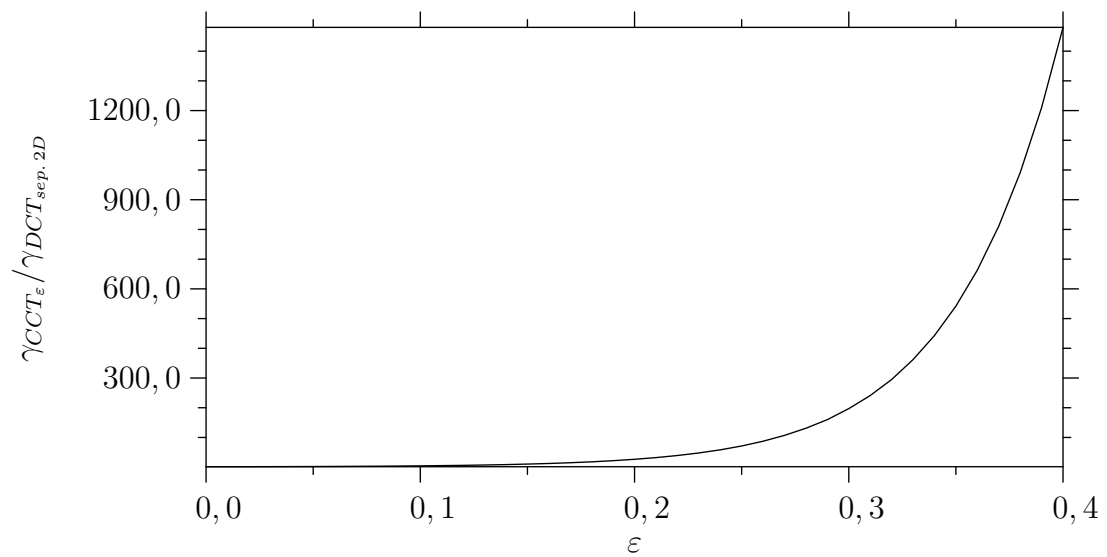


Abbildung 4.6: Entwicklung von $\frac{\gamma_{CCT_\epsilon}}{\gamma_{DCT_{sep. 2D}}}$ für separierbare 8×8 -Transformationen und der für Bildsignale typischen Quellenkorrelation von $\rho = 0,96$ (separierbares zweidimensionales AR(1)-Quellenmodell).

4.3 Der Kanalcodierungsaspekt.

Nachdem im Abschnitt 4.2 der Aspekt der Quellencodierung bzw. Kompression theoretisch untersucht worden ist, wird in diesem Abschnitt der Aspekt der Kanalcodierung bzw. Fehlerrobustheit untersucht.

4.3.1 Theoretische Abschätzung der Korrekturleistung für AR(1)-Quellen

4.3.1.1 Ansatz

Konkret lautet die Aufgabenstellung nach der zu erwartenden Fehlervarianz, welche sich bei der Rekonstruktion aus einer Untermenge $S \subset \Omega$ der Menge aller Transformationskoeffizienten Ω ergibt. Dabei soll das Quellensignal in Analogie zu den vorherigen Abschnitten durch ein AR(1)-Modell repräsentiert werden.

Beschreibt man mit \mathbf{F} das momentane Fehlermuster als N -dimensionaler Zeilenvektor, in welchem „1“-Werte vorhandene Transformationskoeffizienten und „0“-Werte ausgefallene Transformationskoeffizienten darstellen, kann die Gesamtfehlervarianz des Verfahrens als Funktion des Korrelationsparameters α der CCT, der Quellenkorrelation ρ und der Fehlerwahrscheinlichkeit der Fehlermuster wie folgt modelliert werden:

$$\sigma_d^2(\alpha, \rho, P(\mathbf{F})) = E \{ D^2(F) \} = \sum_{\forall \mathbf{F}} P(\mathbf{F}) \cdot E \{ D^2(\mathbf{F}) \} \quad (4.120)$$

$$(4.121)$$

Damit läßt sich das Gesamtproblem in zwei Teilprobleme zerlegen:

1. Die Beschreibung der Fehlermuster \mathbf{F} und ihrer Auftretenswahrscheinlichkeit $P(\mathbf{F})$.
2. Die Modellierung der von \mathbf{F} erzeugten Fehlervarianz $E \{ D^2(\mathbf{F}) \}$.

4.3.2 Die Modellierung des Fehlermusters

Die Generierung des Fehlermusters gestaltet sich recht einfach, da die Gesamtheit aller Fehlermuster sich einfach als Binärcodes der Zahlen zwischen 0 und 2^{N-1} ergibt. Nimmt man an, daß die Fehler unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit P_A auftreten, kann die Auftretenswahrscheinlichkeit eines konkreten Fehlermusters $P(\mathbf{F})$ wie folgt berechnet werden:

$$P(\mathbf{F}) = P_A^{N_0} \cdot (1 - P_A)^{N - N_0}, \quad (4.122)$$

wobei N_0 die Anzahl an 0-Werten, also Ausfällen, in \mathbf{F} darstellt.

4.3.2.1 Die Modellierung der Fehlervarianz

Der Rekonstruktionsfehler ergibt sich zu

$$\mathbf{d}_F = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \quad (4.123)$$

$$= \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{T}}_{\text{inv.}} \cdot \mathbf{y}_{\text{red.}} \quad (4.124)$$

Für $\mathbf{y}_{\text{red.}}$ ergibt, sich wie in der Herleitung zu Gleichung 2.101,

$$\mathbf{y}_{\text{red.}} = \mathbf{T}_{\text{red.}} \cdot \mathbf{x}, \quad (4.125)$$

wobei $\mathbf{T}_{\text{red.}}$ die Transformationsmatrix ist, in der alle den fehlenden Transformationskoeffizienten entsprechenden Zeilen gestrichen worden sind. Der Schätzfehler ergibt sich somit zu

$$\mathbf{d}_F = \mathbf{x} - \underbrace{\tilde{\mathbf{T}}_{\text{inv.}} \cdot \mathbf{T}_{\text{red.}}}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}. \quad (4.126)$$

Die Varianz des Rekonstruktionsfehlers ergibt sich pro Eingangskoeffizient zu

$$\sigma_{\mathbf{F}}^2 = \frac{1}{N} \cdot \text{spur}(\mathbf{R}_{dd}) \quad (4.127)$$

Die Korrelationsmatrix selbst ergibt sich zu

$$\mathbf{R}_{dd} = E \left\{ (\mathbf{x} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x})^H \right\} \quad (4.128)$$

$$= E \left\{ (\mathbf{x} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}^H - \mathbf{x}^H \cdot \mathbf{A}^H) \right\} \quad (4.129)$$

$$= E \left\{ \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^H \right\} - E \left\{ \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^H \cdot \mathbf{A}^H \right\} - E \left\{ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^H \right\} + E \left\{ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^H \cdot \mathbf{A}^H \right\} \quad (4.130)$$

Damit ergibt sich die Korrelationsmatrix des Schätzfehlers zu

$$\mathbf{R}_{dd} = \mathbf{R}_{\mathbf{xx}} - \mathbf{R}_{\mathbf{xx}} \cdot \mathbf{A}^H - \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{xx}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{xx}} \cdot \mathbf{A}^H \quad (4.131)$$

und somit die gesuchte Varianz des Schätzfehlers zu

$$\sigma_{\mathbf{F}}^2 = \text{spur} \left(\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} - \mathbf{R}_{\mathbf{xx}} \cdot \mathbf{A}^H - (\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} \cdot \mathbf{A}^H)^H + \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{xx}} \cdot \mathbf{A}^H \right) \quad (4.132)$$

Da in der Berechnung nur die Diagonalelemente ausgewertet werden, kann dies zu

$$\sigma_{\mathbf{F}}^2 = \text{spur} \left(\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} - 2 \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{xx}} \cdot \mathbf{A}^H + \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{xx}} \cdot \mathbf{A}^H \right) \quad (4.133)$$

mit

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{T}}_{\text{inv.}} \cdot \mathbf{T}_{\text{red.}} \quad (4.134)$$

umgeformt werden. Die Hilfsmatrix \mathbf{A} ergibt mit Gleichung 2.106

$$\mathbf{A} = (\mathbf{R}_{\mathbf{y}_{\text{red.}} \mathbf{y}_{\text{red.}}}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{\text{red.}} \cdot \mathbf{R}_{xx})^H \cdot \mathbf{T}_{\text{red.}} \quad (4.135)$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{T}_{\text{red.}}^H \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{y}_{\text{red.}} \mathbf{y}_{\text{red.}}}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{\text{red.}} \cdot \mathbf{R}_{xx})^H. \quad (4.136)$$

Für den Fall, daß keine Störungen vorliegen, ergibt sich $\mathbf{T}_{\text{red.}} = \mathbf{T}$ und somit

$$\mathbf{A} = (\mathbf{T}^H \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_{xx})^H \quad (4.137)$$

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{T}^H \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{xx}} \cdot \mathbf{T}^H)^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_{xx} \right)^H. \quad (4.138)$$

Mit der Anwendung von Rechenregel A.5 ergibt sich

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{T}^H \cdot (\mathbf{T}^H)^{-1} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{-1} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_{xx} \right)^H \quad (4.139)$$

und damit letztendlich

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (4.140)$$

Eingesetzt in Gleichung 4.133

$$\sigma_{\mathbf{F}}^2 = \text{spur} (\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} - 2 \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{xx}} \cdot \mathbf{I}^H + \mathbf{I} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{xx}} \cdot \mathbf{I}^H) \quad (4.141)$$

ergibt sich das erwartete Ergebnis

$$\Rightarrow \sigma_{\mathbf{F}}^2 = 0. \quad (4.142)$$

Für den anderen Grenzfall, den Ausfall aller Komponenten, gilt

$$\mathbf{T}_{\text{red.}} = \mathbf{R}_{\mathbf{y}_{\text{red.}} \mathbf{y}_{\text{red.}}} = 0 \quad (4.143)$$

und damit

$$\mathbf{A} = 0. \quad (4.144)$$

Auch hier ergibt sich für die Varianz des Rekonstruktionsfehlers das erwartete Ergebnis

$$\sigma_{\mathbf{F}}^2 = \frac{1}{N} \cdot \text{spur} (\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}) = \frac{N}{N} \cdot \sigma_x^2 \quad (4.145)$$

Zum Vergleich sollen die Ergebnisse für das klassische Verfahren, die DCT ohne Schätzverfahren, herangezogen werden. Da die DCT eine orthonormale und damit energiebewahrende (s. [JN90]) Transformation ist, ergibt sich die Fehlervarianz einfach zu

$$\sigma_{F,DCT}^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k \in \Omega-S} \mathbf{R}_{\mathbf{yy}}^{(DCT)}(k, k) \quad (4.146)$$

mit

$$\mathbf{R}_{\mathbf{yy}}^{(DCT)} = \mathbf{T}_{DCT} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{xx}} \cdot \mathbf{T}_{DCT}^H. \quad (4.147)$$

Der Erwartungswert des Schätzfehlers ergibt sich unter der Annahme statistisch unabhängiger Transformationskoeffizienten zu

$$E \{ \sigma_{F,DCT}^2 \} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N P_k \cdot \sigma_{y_k}^2, \quad (4.148)$$

wobei $P_k = P_{err.}$ die Ausfallwahrscheinlichkeit der Transformationskoeffizienten ist. Damit vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$E \{ \sigma_{F,DCT}^2 \} = P_{err.} \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sigma_{y_k}^2, \quad (4.149)$$

womit sich mit der Eigenschaft der Energieerhaltung orthonormaler Transformationen ([JN90])

$$E \{ \sigma_{F,DCT}^2 \} = P_{err.} \cdot \sigma_x^2 \quad (4.150)$$

ergibt. Der mittlere SNR_{dB} ergibt somit zu

$$SNR_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{E \{ \sigma_{F,DCT}^2 \}} \right) = (-10) \cdot \log_{10} (P_{err.}). \quad (4.151)$$

4.3.2.2 Vergleich der Bitraten

Der Transformationsgewinn

$$G_{TC} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{y_k}}{\sqrt[N]{\prod_{k=0}^{N-1} \sigma_{y_k}}} \quad (4.152)$$

nach [JN90] gibt das Verhältnis

$$G_{TC} = \frac{SNR_{TC}}{SNR_{PCM}} \quad (4.153)$$

bei gleicher aufgewendeter Bitrate an. Der SNR der PCM ergibt sich unter der Annahme eines gaußverteilten Eingangssignals zu

$$SNR_{PCM} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2} \quad (4.154)$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{2^{-2R_{PCM}} \cdot \sigma_x^2 \cdot \gamma} \quad (4.155)$$

$$= 2^{2R_{PCM}} \cdot \gamma^{-1}, \quad (4.156)$$

wobei γ der Leistungsfaktor des Quantisierers ist (s. [JN90]). Bei gleicher Rate erzielt eine Transformationscodierung aber nach Gleichung 4.153 einen SNR von

$$SNR_{TC} = SNR_{PCM} \cdot G_{TC} \quad (4.157)$$

$$= G_{TC} \cdot 2^{2R_{PCM}} \cdot \gamma^{-1}. \quad (4.158)$$

Eine PCM müßte zur Erzielung dieses Ergebnisses eine Rate von

$$SNR_{PCM'} = 2^{2R_{PCM'}} \cdot \gamma^{-1} \stackrel{!}{=} G_{TC} \cdot 2^{2R_{PCM}} \cdot \gamma^{-1} \quad (4.159)$$

$$\Rightarrow 2 \cdot R_{PCM'} = \log_2 (G_{TC} \cdot 2^{2R_{PCM}}) \quad (4.160)$$

$$R_{PCM'} = \frac{1}{2} \cdot \log_2 (G_{TC}) + R_{PCM} \quad (4.161)$$

aufwenden. Die Transformationscodierung benötigt also für das gleiche Ergebnis eine um

$$R_{red.} = \frac{1}{2} \cdot \log_2 (G_{TC}) \quad (4.162)$$

geringere Rate als die PCM (s. Abschnitt 1.1.1.7). Für die CCT wurde ein Transformationsgewinn nach Formel 4.117 verwendet.

4.3.3 Umsetzung

Zur Umsetzung der Berechnung wurde ein C++-Programm geschrieben, welches die Berechnung für verschiedene Parameter von N , ϱ , ϵ und P_{err} durchführt und die Ergebnisse neben der Ablage in einer Textdatei auch direkt in L^AT_EX-Tabellen und Abbildungen exportiert.

Der Quelltext des Programms ist im Unterverzeichnis *Kanalcodierung++* zu finden. Die Grundidee des Programms besteht darin, den binären Fehlervektor \mathbf{F} durch eine vorzeichenlose, binäre Ganzzahl zu realisieren. Jedes Bit dieser Binärzahl repräsentiert einen Transformationskoeffizienten, die Binärmuster der vorzeichenlosen Ganzzahlen zwischen 0 und $2^N - 1$ alle möglichen Kombinationen für \mathbf{F} .

Für die Matrixoperationen wurden die Matrixklassen aus der *IT++*-Bibliothek (s. [ITP]) verwendet, von der auch einige eigene Datentypen (*DCT*, *KLT*, *CCT*, *CCTinv*) zur Realisierung der Transformationen abgeleitet worden sind.

Für die DCT wurde die Berechnungsformel

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2N} \cdot k \cdot (2 \cdot n + 1)\right) \cdot \begin{cases} k = 0 & : \sqrt{\frac{1}{N}} \\ \text{sonst} & : \sqrt{\frac{2}{N}} \end{cases} \quad (4.163)$$

genommen, für die DST die Berechnungsformel

$$X(k) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{N+1} \cdot (n+1) \cdot (k+1)\right). \quad (4.164)$$

Parameterisiert wird das Programm über Kommandozeilenoptionen, ein Aufruf ohne weitere Parameter oder mit der „-h“-Option zeigt alle Kommandozeilenparameter an. Zu beachten ist, daß N in der Form 2^m übergeben wird; N selbst ist auf einen Maximalwert von 64 begrenzt. Allerdings gibt es schon für $N = 32$ $2^{32} = 4.294.967.296$ (rund 4,2 Milliarden) Kombinationen. Legt man eine Berechnungszeit von nur einer Millisekunde für die Einzelberechnung zugrunde kommt man auf eine Gesamtzeit von 4,2 Millionen Sekunden oder 49,7 Tagen. Damit wäre aber nur einer von den standardmäßig 21 Epsilon-Werten durchgerechnet.

4.3.4 Ergebnisse für eindimensionale Transformationen und AR(1)-Modelle

Zuerst wurde der Kanalcodierungsaspekt nur für eindimensionale AR(1)-Modelle gemäß Abschnitt 1.3.1 und eindimensionaler Transformationen untersucht.

Die numerischen Ergebnisse sind tabellarisch für $\rho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-2}$ in den Tabellen 4.7 bis 4.10 festgehalten. In der Tabellen 4.9 wurde für $N = 16$ eine höhere Ausfallrate $P_{err} = 10^{-1}$ verwendet, in Tabelle 4.10 eine höhere Quellenkorrelation $\rho = 0,98$.

Die graphische Darstellung der Tabellendaten findet sich in den Abbildungen 4.7 bis 4.11.

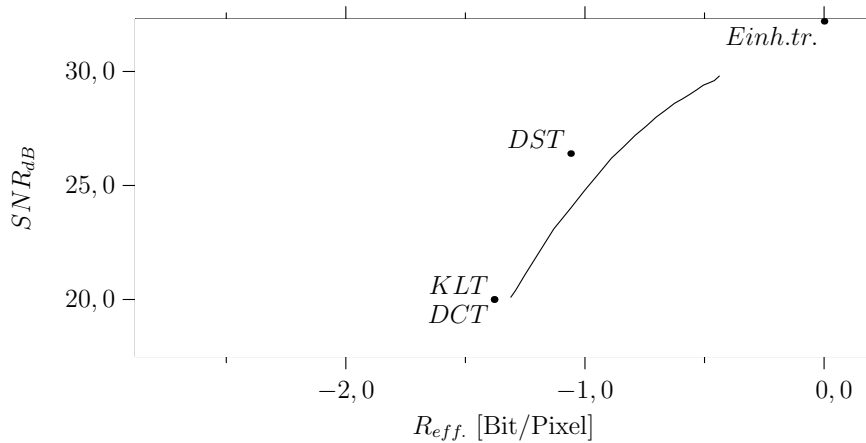


Abbildung 4.7: Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für eindimensionale Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=4$, einer Quellenkorrelation $\rho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 10^{-2}$.

Aus den Ergebnissen ist ersichtlich, daß für eindimensionale AR(1)-Quellensignale und eindimensionale Transformationen die orthogonale CCT in Übereinstimmung mit den Ergebnisse des letzten Abschnitts um 0,22 Bit/Pixel ($N = 16$, $\rho = 0,96$) bzw. 0,23 Bit/Pixel ($N = 16$, $\rho = 0,98$) schlechtere Ratenreduzierungen erreicht als die KLT bzw. DCT, welche in ihren Ergebnissen praktisch gleichauf liegen.

Die Erwartungen hinsichtlich eines Kompromisses zwischen Quellen- und Kanalcodierungsqualität erfüllt die CCT gut. Allerdings treten in Analogie zu den Ergebnissen der Evaluierung an Videodaten im Kapitel 3 merkbliche Sättigungseffekte ein.

Im Vergleich zur DST erzielt die CCT bei $N = 16$ und $\rho = 0,96$ bei gleicher Rate leicht bessere Ergebnisse (s. Abbildungen 4.9 und 4.10) und bei $\rho = 0,98$ deutlich bessere Ergebnisse als die DST (s. Abbildungen 4.11 und 4.12).

Hinsichtlich der Kanalcodierungsleistungen erfüllen sich somit für das gegebene Szenario die Erwartungen in den erarbeiteten Quellen-Kanal-Verbundcodierer.

Für die KLT-Transformation, für welche gemäß Gleichung 2.117 die inverse Transformation selbst die optimale Schätzlösung darstellt, ergibt sich bei der reinen Untersuchung der Kanalfehleraspekte ($\sigma_{q_k}^2 = 0$)

$$\sigma_d^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{c_k}^2 \quad (4.165)$$

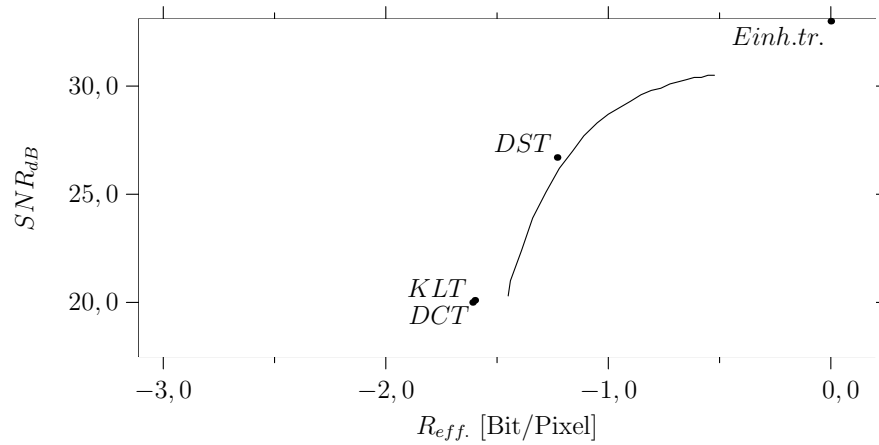


Abbildung 4.8: Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für eindimensionale Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=8$, einer Quellenkorrelation $\varrho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 10^{-2}$.

woraus sich mit der Annahme von unabhängigen Koeffizientenausfällen mit der Wahrscheinlichkeit P_{err} .

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{y_k}^2 \cdot P_{err} \quad (4.166)$$

$$= P_{err} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{y_k}^2 \quad (4.167)$$

ergibt und damit letztendlich

$$\sigma_d^2 = P_{err} \cdot \sigma_x^2. \quad (4.168)$$

Der SNR_{dB} berechnet sich dann zu

$$SNR_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\sigma_d^2}{\sigma_x^2} \right) = (-10) \cdot \log_{10} (P_{err}), \quad (4.169)$$

was sich auch exakt in den Tabellendaten wiederfindet.

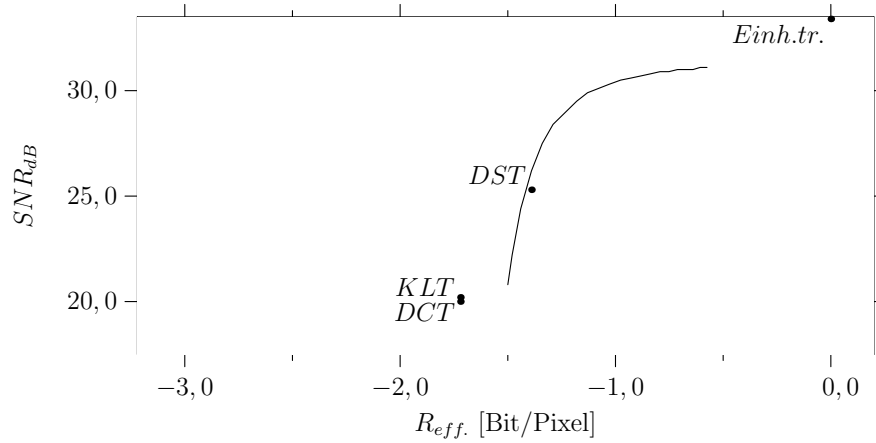


Abbildung 4.9: Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für eindimensionale Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\rho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 10^{-2}$.

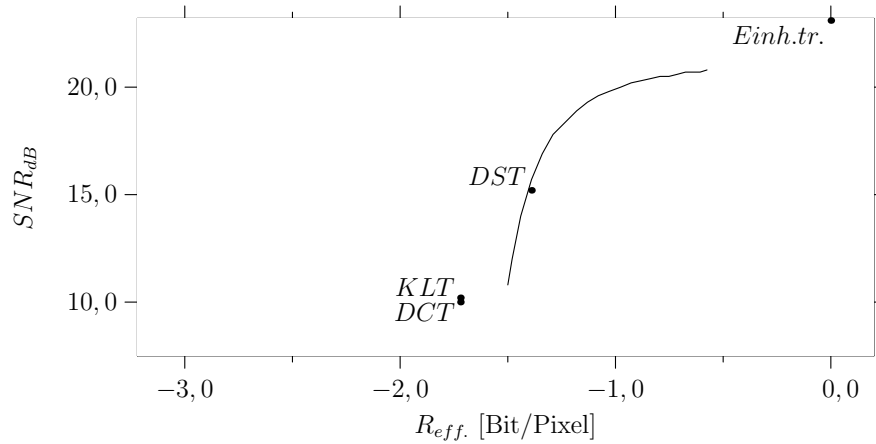


Abbildung 4.10: Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für eindimensionale Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\rho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 10^{-1}$.

Transformation	G_{TC}	$R_{red.}$ [Bit/Pixel]	σ_K^2	SNR_{dB}
$CCT_{\varepsilon=0}$	6,13	-1,31	0,00979	20,1
$CCT_{\varepsilon=0,02}$	5,99	-1,29	0,00914	20,4
$CCT_{\varepsilon=0,04}$	5,64	-1,25	0,0077	21,1
$CCT_{\varepsilon=0,06}$	5,2	-1,19	0,00618	22,1
$CCT_{\varepsilon=0,08}$	4,76	-1,13	0,00493	23,1
$CCT_{\varepsilon=0,1}$	4,36	-1,06	0,00399	24
$CCT_{\varepsilon=0,12}$	4,01	-1	0,0033	24,8
$CCT_{\varepsilon=0,14}$	3,7	-0,944	0,00279	25,5
$CCT_{\varepsilon=0,16}$	3,43	-0,889	0,00241	26,2
$CCT_{\varepsilon=0,18}$	3,19	-0,838	0,00212	26,7
$CCT_{\varepsilon=0,2}$	2,99	-0,79	0,0019	27,2
$CCT_{\varepsilon=0,22}$	2,81	-0,744	0,00173	27,6
$CCT_{\varepsilon=0,24}$	2,65	-0,702	0,00159	28
$CCT_{\varepsilon=0,26}$	2,51	-0,663	0,00148	28,3
$CCT_{\varepsilon=0,28}$	2,38	-0,626	0,00139	28,6
$CCT_{\varepsilon=0,3}$	2,27	-0,592	0,00131	28,8
$CCT_{\varepsilon=0,32}$	2,18	-0,561	0,00125	29
$CCT_{\varepsilon=0,34}$	2,09	-0,532	0,0012	29,2
$CCT_{\varepsilon=0,36}$	2,01	-0,505	0,00115	29,4
$CCT_{\varepsilon=0,38}$	1,95	-0,481	0,00112	29,5
$CCT_{\varepsilon=0,4}$	1,89	-0,459	0,00108	29,6
$CCT_{\varepsilon=0,42}$	1,84	-0,438	0,00106	29,8
KLT	6,75	-1,38	0,01	20
DCT	6,73	-1,38	0,00991	20
DST	4,37	-1,06	0,00227	26,4
Einh.-Tr.	1.0	0.0	0,000602	32,2

Tabelle 4.6: Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für eindimensionale Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=4$, einer Quellenkorrelation $\rho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 0,01$.

Transformation	G_{TC}	$R_{red.}$ [Bit/Pixel]	σ_q^2	SNR_{dB}
$CCT_{\varepsilon=0}$	7,51	-1,45	0,00928	20,3
$CCT_{\varepsilon=0,02}$	7,32	-1,44	0,00799	21
$CCT_{\varepsilon=0,04}$	6,88	-1,39	0,00578	22,4
$CCT_{\varepsilon=0,06}$	6,37	-1,34	0,00411	23,9
$CCT_{\varepsilon=0,08}$	5,88	-1,28	0,00306	25,1
$CCT_{\varepsilon=0,1}$	5,42	-1,22	0,0024	26,2
$CCT_{\varepsilon=0,12}$	5,01	-1,16	0,00198	27
$CCT_{\varepsilon=0,14}$	4,64	-1,11	0,00169	27,7
$CCT_{\varepsilon=0,16}$	4,31	-1,05	0,00149	28,3
$CCT_{\varepsilon=0,18}$	4,01	-1	0,00135	28,7
$CCT_{\varepsilon=0,2}$	3,73	-0,95	0,00125	29
$CCT_{\varepsilon=0,22}$	3,48	-0,9	0,00117	29,3
$CCT_{\varepsilon=0,24}$	3,26	-0,853	0,0011	29,6
$CCT_{\varepsilon=0,26}$	3,06	-0,807	0,00106	29,8
$CCT_{\varepsilon=0,28}$	2,88	-0,764	0,00102	29,9
$CCT_{\varepsilon=0,3}$	2,73	-0,723	0,000986	30,1
$CCT_{\varepsilon=0,32}$	2,58	-0,685	0,00096	30,2
$CCT_{\varepsilon=0,34}$	2,46	-0,648	0,000939	30,3
$CCT_{\varepsilon=0,36}$	2,34	-0,614	0,000922	30,4
$CCT_{\varepsilon=0,38}$	2,24	-0,582	0,000908	30,4
$CCT_{\varepsilon=0,4}$	2,15	-0,552	0,000895	30,5
$CCT_{\varepsilon=0,42}$	2,07	-0,523	0,000885	30,5
KLT	9,28	-1,61	0,01	20
DCT	9,24	-1,6	0,00974	20,1
DST	5,49	-1,23	0,00215	26,7
Einh.-Tr.	1.0	0.0	0,000506	33

Tabelle 4.7: Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für eindimensionale Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=8$, einer Quellenkorrelation $\varrho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 0,01$.

Transformation	G_{TC}	$R_{red.}$ [Bit/Pixel]	σ_K^2	SNR_{dB}
$CCT_{\varepsilon=0}$	8,03	-1,5	0,00833	20,8
$CCT_{\varepsilon=0,02}$	7,82	-1,48	0,00608	22,2
$CCT_{\varepsilon=0,04}$	7,37	-1,44	0,00362	24,4
$CCT_{\varepsilon=0,06}$	6,87	-1,39	0,00239	26,2
$CCT_{\varepsilon=0,08}$	6,39	-1,34	0,00178	27,5
$CCT_{\varepsilon=0,1}$	5,95	-1,29	0,00145	28,4
$CCT_{\varepsilon=0,12}$	5,53	-1,23	0,00125	29
$CCT_{\varepsilon=0,14}$	5,14	-1,18	0,00112	29,5
$CCT_{\varepsilon=0,16}$	4,78	-1,13	0,00104	29,9
$CCT_{\varepsilon=0,18}$	4,45	-1,08	0,000973	30,1
$CCT_{\varepsilon=0,2}$	4,14	-1,03	0,000927	30,3
$CCT_{\varepsilon=0,22}$	3,87	-0,976	0,000893	30,5
$CCT_{\varepsilon=0,24}$	3,62	-0,927	0,000866	30,6
$CCT_{\varepsilon=0,26}$	3,39	-0,881	0,000846	30,7
$CCT_{\varepsilon=0,28}$	3,19	-0,836	0,00083	30,8
$CCT_{\varepsilon=0,3}$	3	-0,793	0,000817	30,9
$CCT_{\varepsilon=0,32}$	2,83	-0,752	0,000807	30,9
$CCT_{\varepsilon=0,34}$	2,69	-0,712	0,000799	31
$CCT_{\varepsilon=0,36}$	2,55	-0,675	0,000793	31
$CCT_{\varepsilon=0,38}$	2,43	-0,64	0,000788	31
$CCT_{\varepsilon=0,4}$	2,32	-0,607	0,000784	31,1
$CCT_{\varepsilon=0,42}$	2,22	-0,575	0,000781	31,1
KLT	10,9	-1,72	0,01	20
DCT	10,8	-1,72	0,00949	20,2
DST	6,83	-1,39	0,00298	25,3
Einh.-Tr.	1.0	0.0	0,000459	33,4

Tabelle 4.8: Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für eindimensionale Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\rho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 0,01$.

Transformation	G_{TC}	$R_{red.}$ [Bit/Pixel]	σ_K^2	SNR_{dB}
$CCT_{\varepsilon=0}$	8,03	-1,5	0,084	10,8
$CCT_{\varepsilon=0,02}$	7,82	-1,48	0,0634	12
$CCT_{\varepsilon=0,04}$	7,37	-1,44	0,0397	14
$CCT_{\varepsilon=0,06}$	6,87	-1,39	0,0271	15,7
$CCT_{\varepsilon=0,08}$	6,39	-1,34	0,0205	16,9
$CCT_{\varepsilon=0,1}$	5,95	-1,29	0,0167	17,8
$CCT_{\varepsilon=0,12}$	5,53	-1,23	0,0144	18,4
$CCT_{\varepsilon=0,14}$	5,14	-1,18	0,0129	18,9
$CCT_{\varepsilon=0,16}$	4,78	-1,13	0,0118	19,3
$CCT_{\varepsilon=0,18}$	4,45	-1,08	0,011	19,6
$CCT_{\varepsilon=0,2}$	4,14	-1,03	0,0105	19,8
$CCT_{\varepsilon=0,22}$	3,87	-0,976	0,01	20
$CCT_{\varepsilon=0,24}$	3,62	-0,927	0,00966	20,2
$CCT_{\varepsilon=0,26}$	3,39	-0,881	0,00938	20,3
$CCT_{\varepsilon=0,28}$	3,19	-0,836	0,00915	20,4
$CCT_{\varepsilon=0,3}$	3	-0,793	0,00897	20,5
$CCT_{\varepsilon=0,32}$	2,83	-0,752	0,00882	20,5
$CCT_{\varepsilon=0,34}$	2,69	-0,712	0,00869	20,6
$CCT_{\varepsilon=0,36}$	2,55	-0,675	0,00858	20,7
$CCT_{\varepsilon=0,38}$	2,43	-0,64	0,00849	20,7
$CCT_{\varepsilon=0,4}$	2,32	-0,607	0,00842	20,7
$CCT_{\varepsilon=0,42}$	2,22	-0,575	0,00835	20,8
KLT	10,9	-1,72	0,1	10
DCT	10,8	-1,72	0,0954	10,2
DST	6,83	-1,39	0,0305	15,2
Einh.-Tr.	1.0	0.0	0,00495	23,1

Tabelle 4.9: Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für eindimensionale Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\varrho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 0,1$.

Transformation	G_{TC}	$R_{red.}$ [Bit/Pixel]	σ_K^2	SNR_{dB}
$CCT_{\varepsilon=0}$	15	-1,95	0,00902	20,4
$CCT_{\varepsilon=0,02}$	14,3	-1,92	0,00483	23,2
$CCT_{\varepsilon=0,04}$	13,1	-1,85	0,00223	26,5
$CCT_{\varepsilon=0,06}$	11,9	-1,78	0,00133	28,8
$CCT_{\varepsilon=0,08}$	10,8	-1,71	0,000946	30,2
$CCT_{\varepsilon=0,1}$	9,77	-1,64	0,000752	31,2
$CCT_{\varepsilon=0,12}$	8,86	-1,57	0,000641	31,9
$CCT_{\varepsilon=0,14}$	8,03	-1,5	0,000571	32,4
$CCT_{\varepsilon=0,16}$	7,27	-1,43	0,000524	32,8
$CCT_{\varepsilon=0,18}$	6,6	-1,36	0,000492	33,1
$CCT_{\varepsilon=0,2}$	6	-1,29	0,000468	33,3
$CCT_{\varepsilon=0,22}$	5,46	-1,23	0,00045	33,5
$CCT_{\varepsilon=0,24}$	4,99	-1,16	0,000436	33,6
$CCT_{\varepsilon=0,26}$	4,58	-1,1	0,000426	33,7
$CCT_{\varepsilon=0,28}$	4,22	-1,04	0,000418	33,8
$CCT_{\varepsilon=0,3}$	3,9	-0,981	0,000411	33,9
$CCT_{\varepsilon=0,32}$	3,61	-0,927	0,000406	33,9
$CCT_{\varepsilon=0,34}$	3,36	-0,875	0,000402	34
$CCT_{\varepsilon=0,36}$	3,14	-0,826	0,000399	34
$CCT_{\varepsilon=0,38}$	2,95	-0,78	0,000396	34
$CCT_{\varepsilon=0,4}$	2,78	-0,737	0,000394	34
$CCT_{\varepsilon=0,42}$	2,62	-0,696	0,000393	34,1
KLT	20,6	-2,18	0,01	20
DCT	20,6	-2,18	0,00967	20,1
DST	10,1	-1,66	0,00153	28,2
Einh.-Tr.	1.0	0.0	0,000228	36,4

Tabelle 4.10: Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für ein-dimensionale Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\rho = 0,98$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 0,01$.

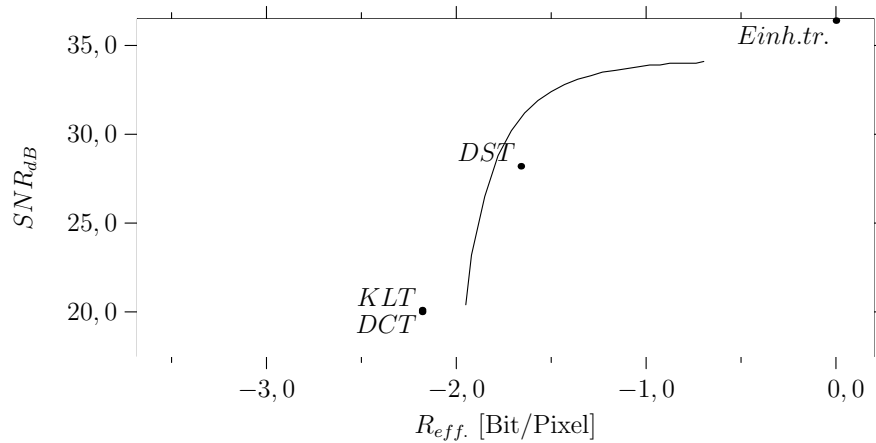


Abbildung 4.11: Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für eindimensionale Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\rho = 0,98$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 10^{-2}$.

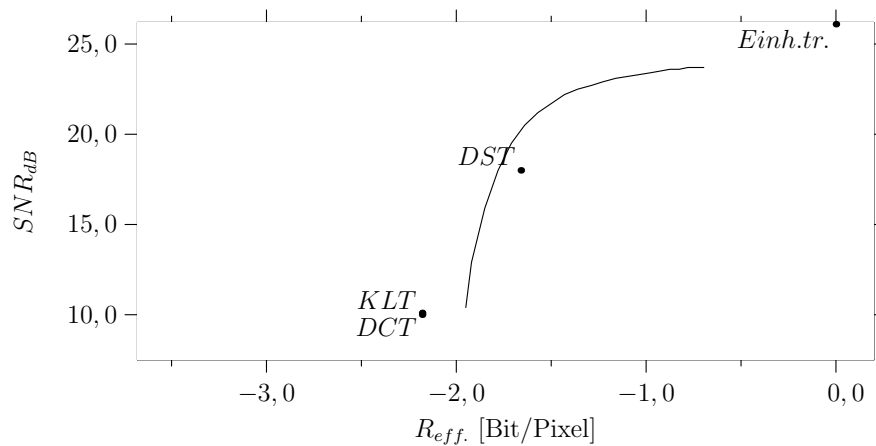


Abbildung 4.12: Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für eindimensionale Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\rho = 0,98$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 10^{-1}$.

4.3.5 Ergebnisse für zweidimensionale Transformationen

Von wesentlich größerer Bedeutung für die Bildsignalverarbeitung sind die Ergebnisse für zweidimensionale separierbare AR(1)-Signale gemäß Abschnitt 1.3.2 und separierbare zweidimensionale Transformationen, welche nach den Überlegungen aus dem Abschnitt 2.2.3 in Form eindimensionaler Transformationen eingebracht werden.

Die numerischen Ergebnisse sind in den Tabellen 4.11 bis 4.15 enthalten. Einige dieser Daten sind auch graphisch in den Abbildungen 4.13 bis 4.15 dargestellt.

Vergleicht man die Daten für das eindimensionale Szenario mit denen des zweidimensionalen Szenarios, so ergeben sich für $N = 16$, $\varrho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-2}$ (Tabellen 4.13 und 4.13) folgende Ergebnisse: Der Transformationsgewinn der DCT erhöht sich von $G_{TC}^{1D} = 10,8$ auf $G_{TC}^{2D} = 45,3$. Somit sind bei gleichem Korrelationsfaktor bedeutend höhere Transformationsgewinne möglich. Nach den Überlegungen aus dem Abschnitt 1.1.1.7 kann somit bei gleicher Ratenaufwendung und gaußverteilten Eingangsdaten die Rate durch die Transformation für das eindimensionale Szenario bei der DCT um 1,72 Bit/Abtastwert gesenkt werden, im zweidimensionalen Szenario um 2,75 Bit/Abtastwert.

Wie im eindimensionalen Szenario erreichen die DCT und die ein- und zweidimensionale separierbare KLT praktisch die gleichen Resultate.

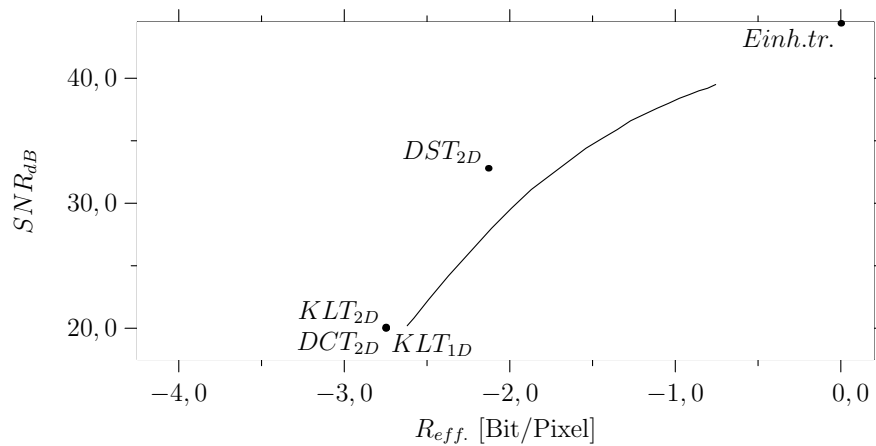
Bei der Betrachtung der Ergebnisse für die CCT selbst fällt auf, daß der Kurvenzug bedeutend flacher verläuft als im eindimensionalen Szenario. Durch die geringere Steilheit der Kurve für kleine ε -Werte verliert die CCT hier gegenüber der DST deutlich an Potential, die separierbare zweidimensionale DST schneidet für separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellen bei gleicher Rate deutlich besser ab als die CCT.

Ein Sättigungseffekt wie im eindimensionalen Szenario ist bei der flachen Kurve der CCT nicht festzustellen, allerdings kann dieser wie im eindimensionalen Szenario erst bei höheren Transformationsgrößen N deutlich auftreten.

4.3.6 Einfluß der Parameter

In diesem Abschnitt soll der Einfluß der Parameter Transformationsgröße N , Quellenkorrelation ϱ , Fehlerrate P_{err} sowie des Quellensignalcharakters (eindimensionale oder separierbare zweidimensionale AR(1)-Quelle) vergleichend untersucht werden.

Die Gegenüberstellung der Ergebnisse für verschiedene N in Abbildung 4.16 zeigt einerseits die Verbesserung der Quellencodierfähigkeit mit steigendem N (erhöhte Redundanzreduktion und damit höhere Ratenreduktion, Linksverschiebung des Kurvenanfangs) wie auch die Verbesserung der Kanalcodierungsleistung hinsicht-



Abbildungung 4.13: Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für zweidimensionale separierbare Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\rho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 10^{-2}$.

lich höherer erzielter SNR_{dB} -Werte.

Der Anstieg der SNR-Verbesserung wird mit steigendem N gerade für das eindimensionale Szenario bedeutend steiler, somit werden schon für kleine ε bzw. Fehlerschutzredundanzen große Verbesserungen in der Fehlerrobustheit erzielt. Allerdings ist in den Kurven für das eindimensionale Szenario gerade bei den größeren N ein deutlicherer Sättigungseffekt erkennbar.

Diese Steilheit ist im zweidimensionalen Szenario deutlich geringer, auch ein Sättigung ist nicht erkennbar.

Im direkten Vergleich zwischen dem eindimensionalen und dem zweidimensionalen Szenario zeigt sich, daß bei gleicher Transformationsgröße, Quellenkorrelation und Fehlerrate im zweidimensionalen Szenario deutlich bessere Ergebnisse erzielt werden als im eindimensionalen Szenario, auch wenn die CCT im zweidimensionalen Szenario relativ zur DST schlechter abschneidet.

Abbildungung 4.17 zeigt, daß erwartungsgemäß sowohl die Quellencodierleistung als auch die Korrekturleistung mit steigender Quellenkorrelation ρ steigen.

Da die Korrekturleistung hauptsächlich von der Quellenkorrelation und der Transformationsbreite abhängt, bewirkt eine Erhöhung der Fehlerrate nur eine Verschiebung des „Nullpunktes“ für $\epsilon = 0$ nach Gleichung 4.17 und damit des gesamten Kurvenverlaufes nach unten (s. Abbildung 4.18).

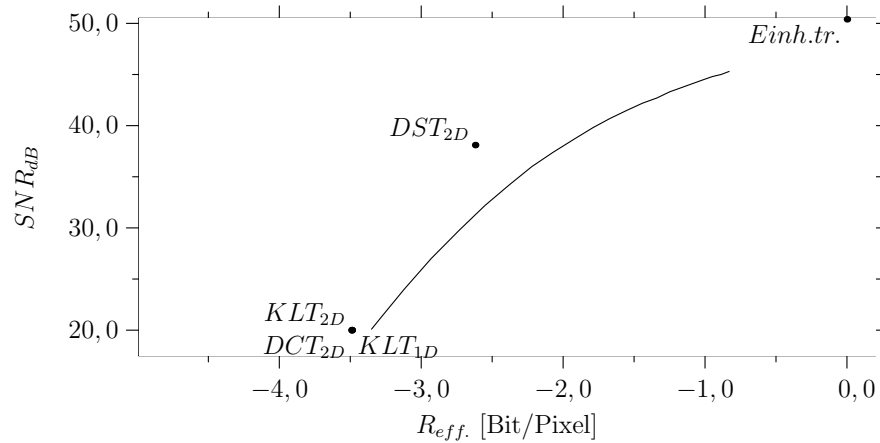


Abbildung 4.14: Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für zweidimensionale separierbare Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\rho = 0,98$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 10^{-2}$.

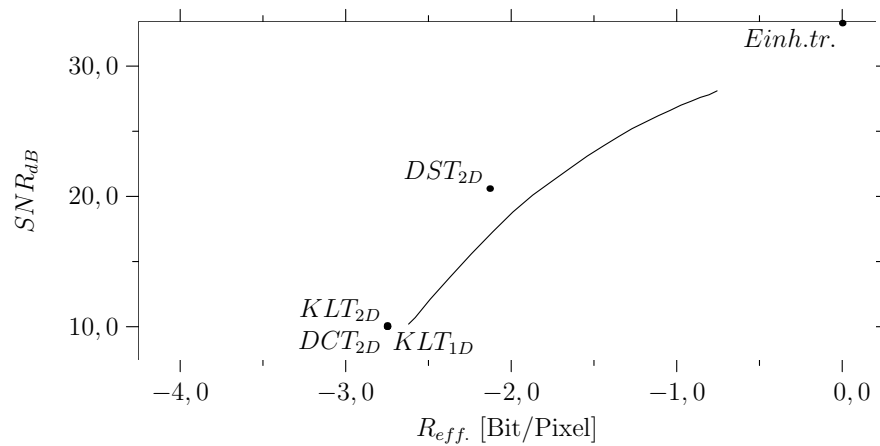


Abbildung 4.15: Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für zweidimensionale separierbare Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\rho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 10^{-1}$.

Transformation	G_{TC}	$R_{red.}$ [Bit/Pixel]	σ_K^2	SNR_{dB}
$CCT_{\varepsilon=0}$	12,8	-1,84	0,01	20
$CCT_{\varepsilon=0,02}$	12,3	-1,81	0,00932	20,3
$CCT_{\varepsilon=0,04}$	11,2	-1,74	0,0077	21,1
$CCT_{\varepsilon=0,06}$	9,8	-1,65	0,0059	22,3
$CCT_{\varepsilon=0,08}$	8,42	-1,54	0,00436	23,6
$CCT_{\varepsilon=0,1}$	7,2	-1,42	0,00319	25
$CCT_{\varepsilon=0,12}$	6,2	-1,32	0,00236	26,3
$CCT_{\varepsilon=0,14}$	5,38	-1,21	0,00178	27,5
$CCT_{\varepsilon=0,16}$	4,72	-1,12	0,00137	28,6
$CCT_{\varepsilon=0,18}$	4,19	-1,03	0,00108	29,7
$CCT_{\varepsilon=0,2}$	3,76	-0,955	0,000871	30,6
$CCT_{\varepsilon=0,22}$	3,41	-0,885	0,000716	31,5
$CCT_{\varepsilon=0,24}$	3,12	-0,822	0,0006	32,2
$CCT_{\varepsilon=0,26}$	2,89	-0,765	0,000511	32,9
$CCT_{\varepsilon=0,28}$	2,69	-0,713	0,000443	33,5
$CCT_{\varepsilon=0,3}$	2,52	-0,667	0,000388	34,1
$CCT_{\varepsilon=0,32}$	2,38	-0,626	0,000345	34,6
$CCT_{\varepsilon=0,34}$	2,26	-0,588	0,00031	35,1
$CCT_{\varepsilon=0,36}$	2,16	-0,555	0,000281	35,5
$CCT_{\varepsilon=0,38}$	2,07	-0,524	0,000257	35,9
$CCT_{\varepsilon=0,4}$	1,99	-0,497	0,000237	36,2
$CCT_{\varepsilon=0,42}$	1,92	-0,472	0,00022	36,6
KLT_{2D}	12,8	-1,84	0,01	20
KLT_{1D}	12,8	-1,84	0,01	20
DCT	12,8	-1,84	0,01	20
DST	12,8	-1,84	0,01	20
Einh.-Tr.	1.0	0.0	7,94e-05	41

Tabelle 4.11: Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für zweidimensionale separierbare Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=4$, einer Quellenkorrelation $\varrho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 0,01$.

Transformation	G_{TC}	$R_{red.}$ [Bit/Pixel]	σ_K^2	SNR_{dB}
$CCT_{\varepsilon=0}$	25,3	-2,33	0,01	20
$CCT_{\varepsilon=0,02}$	23,5	-2,28	0,00866	20,6
$CCT_{\varepsilon=0,04}$	19,6	-2,15	0,00603	22,2
$CCT_{\varepsilon=0,06}$	15,5	-1,98	0,00381	24,2
$CCT_{\varepsilon=0,08}$	12,2	-1,8	0,00237	26,3
$CCT_{\varepsilon=0,1}$	9,72	-1,64	0,00151	28,2
$CCT_{\varepsilon=0,12}$	7,9	-1,49	0,00101	30
$CCT_{\varepsilon=0,14}$	6,56	-1,36	0,000702	31,5
$CCT_{\varepsilon=0,16}$	5,57	-1,24	0,00051	32,9
$CCT_{\varepsilon=0,18}$	4,81	-1,13	0,000384	34,2
$CCT_{\varepsilon=0,2}$	4,23	-1,04	0,0003	35,2
$CCT_{\varepsilon=0,22}$	3,78	-0,958	0,00024	36,2
$CCT_{\varepsilon=0,24}$	3,41	-0,885	0,000198	37
$CCT_{\varepsilon=0,26}$	3,12	-0,82	0,000166	37,8
$CCT_{\varepsilon=0,28}$	2,88	-0,762	0,000142	38,5
$CCT_{\varepsilon=0,3}$	2,68	-0,71	0,000124	39,1
$CCT_{\varepsilon=0,32}$	2,51	-0,664	0,00011	39,6
$CCT_{\varepsilon=0,34}$	2,37	-0,623	9,81e-05	40,1
$CCT_{\varepsilon=0,36}$	2,25	-0,586	8,88e-05	40,5
$CCT_{\varepsilon=0,38}$	2,15	-0,552	8,11e-05	40,9
$CCT_{\varepsilon=0,4}$	2,06	-0,522	7,48e-05	41,3
$CCT_{\varepsilon=0,42}$	1,99	-0,495	6,94e-05	41,6
KLT_{2D}	25,3	-2,33	0,01	20
KLT_{1D}	25,3	-2,33	0,01	20
DCT	25,3	-2,33	0,01	20
DST	25,3	-2,33	0,01	20
Einh.-Tr.	1.0	0.0	2,52e-05	46

Tabelle 4.12: Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für zwei-dimensionale separierbare Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=4$, einer Quellenkorrelation $\varrho = 0,98$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 0,01$.

Transformation	G_{TC}	$R_{red.}$ [Bit/Pixel]	σ_K^2	SNR_{dB}
$CCT_{\varepsilon=0}$	37,6	-2,62	0,00959	20,2
$CCT_{\varepsilon=0,02}$	35,9	-2,58	0,00836	20,8
$CCT_{\varepsilon=0,04}$	31,7	-2,49	0,00592	22,3
$CCT_{\varepsilon=0,06}$	26,9	-2,37	0,00382	24,2
$CCT_{\varepsilon=0,08}$	22,5	-2,24	0,00243	26,1
$CCT_{\varepsilon=0,1}$	18,7	-2,11	0,0016	28
$CCT_{\varepsilon=0,12}$	15,7	-1,99	0,00109	29,6
$CCT_{\varepsilon=0,14}$	13,3	-1,87	0,000782	31,1
$CCT_{\varepsilon=0,16}$	11,4	-1,75	0,000584	32,3
$CCT_{\varepsilon=0,18}$	9,77	-1,64	0,000453	33,4
$CCT_{\varepsilon=0,2}$	8,47	-1,54	0,000364	34,4
$CCT_{\varepsilon=0,22}$	7,41	-1,44	0,000301	35,2
$CCT_{\varepsilon=0,24}$	6,53	-1,35	0,000255	35,9
$CCT_{\varepsilon=0,26}$	5,79	-1,27	0,00022	36,6
$CCT_{\varepsilon=0,28}$	5,18	-1,19	0,000194	37,1
$CCT_{\varepsilon=0,3}$	4,67	-1,11	0,000174	37,6
$CCT_{\varepsilon=0,32}$	4,23	-1,04	0,000158	38
$CCT_{\varepsilon=0,34}$	3,86	-0,975	0,000145	38,4
$CCT_{\varepsilon=0,36}$	3,55	-0,914	0,000135	38,7
$CCT_{\varepsilon=0,38}$	3,28	-0,857	0,000126	39
$CCT_{\varepsilon=0,4}$	3,05	-0,805	0,000119	39,2
$CCT_{\varepsilon=0,42}$	2,85	-0,756	0,000113	39,5
KLT_{2D}	45,6	-2,75	0,01	20
KLT_{1D}	45,6	-2,75	0,01	20
DCT	45,3	-2,75	0,00983	20,1
DST	19,1	-2,13	0,00052	32,8
Einh.-Tr.	1.0	0.0	3,64e-05	44,4

Tabelle 4.13: Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für zweidimensionale separierbare Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\rho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 0,01$.

Transformation	G_{TC}	$R_{red.}$ [Bit/Pixel]	σ_K^2	SNR_{dB}
$CCT_{\varepsilon=0}$	104	-3,35	0,00978	20,1
$CCT_{\varepsilon=0,02}$	94,8	-3,28	0,00743	21,3
$CCT_{\varepsilon=0,04}$	75,7	-3,12	0,00398	24
$CCT_{\varepsilon=0,06}$	57,8	-2,93	0,00199	27
$CCT_{\varepsilon=0,08}$	44,1	-2,73	0,00105	29,8
$CCT_{\varepsilon=0,1}$	34,2	-2,55	0,000606	32,2
$CCT_{\varepsilon=0,12}$	26,9	-2,38	0,000378	34,2
$CCT_{\varepsilon=0,14}$	21,6	-2,22	0,000254	36
$CCT_{\varepsilon=0,16}$	17,5	-2,07	0,000181	37,4
$CCT_{\varepsilon=0,18}$	14,4	-1,92	0,000136	38,7
$CCT_{\varepsilon=0,2}$	12	-1,79	0,000106	39,8
$CCT_{\varepsilon=0,22}$	10,1	-1,67	8,56e-05	40,7
$CCT_{\varepsilon=0,24}$	8,59	-1,55	7,13e-05	41,5
$CCT_{\varepsilon=0,26}$	7,4	-1,44	6,09e-05	42,2
$CCT_{\varepsilon=0,28}$	6,44	-1,34	5,31e-05	42,7
$CCT_{\varepsilon=0,3}$	5,67	-1,25	4,71e-05	43,3
$CCT_{\varepsilon=0,32}$	5,03	-1,17	4,25e-05	43,7
$CCT_{\varepsilon=0,34}$	4,51	-1,09	3,88e-05	44,1
$CCT_{\varepsilon=0,36}$	4,08	-1,01	3,58e-05	44,5
$CCT_{\varepsilon=0,38}$	3,72	-0,948	3,34e-05	44,8
$CCT_{\varepsilon=0,4}$	3,42	-0,887	3,13e-05	45
$CCT_{\varepsilon=0,42}$	3,16	-0,83	2,97e-05	45,3
KLT_{2D}	127	-3,49	0,01	20
KLT_{1D}	127	-3,49	0,01	20
DCT	127	-3,49	0,00991	20
DST	38	-2,62	0,000154	38,1
Einh.-Tr.	1.0	0.0	9,17e-06	50,4

Tabelle 4.14: Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für zwei-dimensionale separierbare Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\varrho = 0,98$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 0,01$.

Transformation	G_{TC}	$R_{red.}$ [Bit/Pixel]	σ_K^2	SNR_{dB}
$CCT_{\varepsilon=0}$	37,6	-2,62	0,0963	10,2
$CCT_{\varepsilon=0,02}$	35,9	-2,58	0,0848	10,7
$CCT_{\varepsilon=0,04}$	31,7	-2,49	0,0617	12,1
$CCT_{\varepsilon=0,06}$	26,9	-2,37	0,0413	13,8
$CCT_{\varepsilon=0,08}$	22,5	-2,24	0,0274	15,6
$CCT_{\varepsilon=0,1}$	18,7	-2,11	0,0187	17,3
$CCT_{\varepsilon=0,12}$	15,7	-1,99	0,0133	18,8
$CCT_{\varepsilon=0,14}$	13,3	-1,87	0,00981	20,1
$CCT_{\varepsilon=0,16}$	11,4	-1,75	0,00752	21,2
$CCT_{\varepsilon=0,18}$	9,77	-1,64	0,00597	22,2
$CCT_{\varepsilon=0,2}$	8,47	-1,54	0,00487	23,1
$CCT_{\varepsilon=0,22}$	7,41	-1,44	0,00408	23,9
$CCT_{\varepsilon=0,24}$	6,53	-1,35	0,00349	24,6
$CCT_{\varepsilon=0,26}$	5,79	-1,27	0,00304	25,2
$CCT_{\varepsilon=0,28}$	5,18	-1,19	0,00269	25,7
$CCT_{\varepsilon=0,3}$	4,67	-1,11	0,00241	26,2
$CCT_{\varepsilon=0,32}$	4,23	-1,04	0,00219	26,6
$CCT_{\varepsilon=0,34}$	3,86	-0,975	0,00201	27
$CCT_{\varepsilon=0,36}$	3,55	-0,914	0,00187	27,3
$CCT_{\varepsilon=0,38}$	3,28	-0,857	0,00174	27,6
$CCT_{\varepsilon=0,4}$	3,05	-0,805	0,00164	27,8
$CCT_{\varepsilon=0,42}$	2,85	-0,756	0,00155	28,1
KLT_{2D}	45,6	-2,75	0,1	10
KLT_{1D}	45,6	-2,75	0,1	10
DCT	45,3	-2,75	0,0984	10,1
DST	19,1	-2,13	0,0088	20,6
Einh.-Tr.	1.0	0.0	0,000467	33,3

Tabelle 4.15: Ergebnisse für die Berechnung der Kanalcodierungsleistung für zweidimensionale separierbare Transformationen und AR(1)-Quellen bei einer Transformationsgröße $N=16$, einer Quellenkorrelation $\rho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 0,1$.

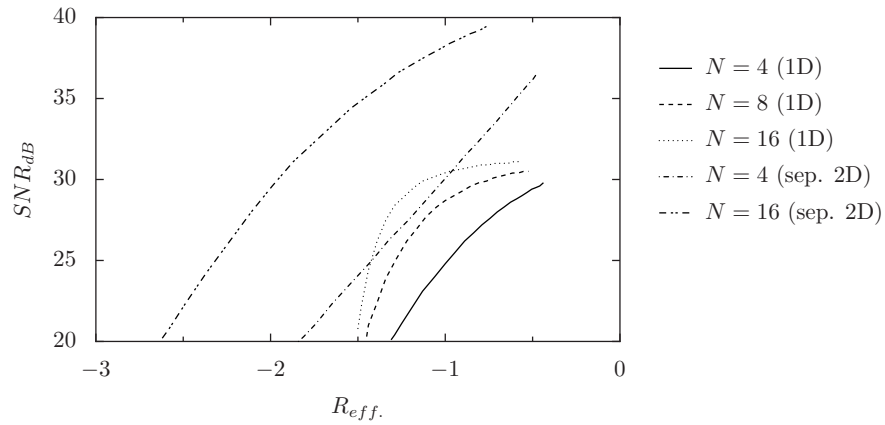


Abbildung 4.16: Gegenüberstellung der Ergebnisse für verschiedene N bei einer Quellenkorrelation $\varrho = 0,96$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 10^{-2}$.

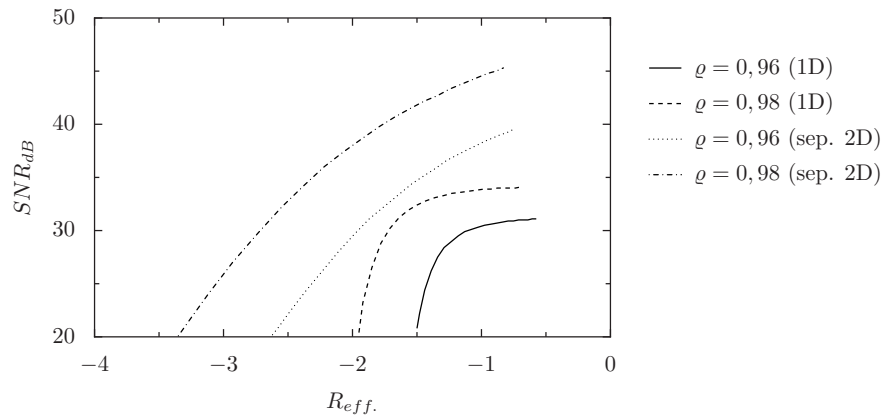


Abbildung 4.17: Gegenüberstellung der Ergebnisse für verschiedene ϱ bei einer Transformationsbreite $N = 16$ und einer Ausfallrate $P_{err} = 10^{-2}$.

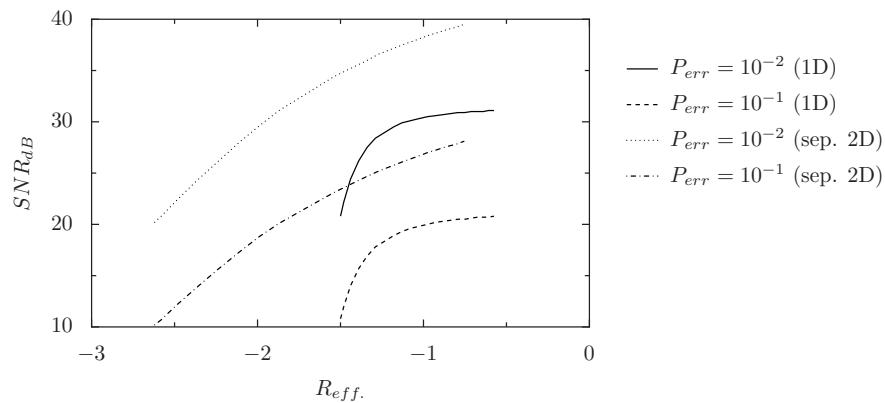


Abbildung 4.18: Gegenüberstellung der Ergebnisse für verschiedene P_{err} bei einer Transformationsbreite $N = 16$ und einer Quellenkorrelation $\varrho = 0,96$.

4.4 Gesamtbetrachtung

Nachdem der Quellencodierungs- und Kanalcodierungsaspekt getrennt evaluiert worden sind, sollen nun die Ergebnisse zu einer Gesamtbilanz vereinigt werden. Anhand dieser Gesamtbilanz kann eine Aussage getroffen werden über die letztendliche Rekonstruktionsqualität beim Empfänger bei vorgegebenem Ratenaufwand beim Sender.

Geht man von der Unabhängigkeit von Quantisierungs- und Kanalfehlern aus, so ergibt sich die Gesamtfehlervarianz zu

$$\sigma_{d,ges.}^2 = \sigma_q^2 + \sigma_K^2, \quad (4.170)$$

wobei sich der Quantisierungsfehler gemäß Gleichung 4.107 zu

$$\sigma_q^2 = 2^{-2R} \cdot \gamma \quad (4.171)$$

ergibt. Die Gamma-Faktoren wurden für die CCT gemäß Gleichung 4.102 zu

$$\gamma_{CCT} = \left(\frac{1}{4\alpha^2} + \alpha^2 \right)^{\log_2(N)} \cdot \sqrt[N]{\prod_{k=0}^{N-1} \sigma_{y_k}^2} \quad (4.172)$$

berechnet, für alle orthonormalen Transformationen wurde gemäß Gleichung 4.106 die Formel

$$\gamma_{Orthon.} = \sqrt[N]{\prod_{k=0}^{N-1} \sigma_{y_k}^2} \quad (4.173)$$

verwendet.

Für den SNR_{dB} ergibt sich mit

$$SNR_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_{d,ges.}^2} \right) \quad (4.174)$$

und $\sigma_x^2 \stackrel{!}{=} 1$

$$= (-10) \cdot \log_{10} (\sigma_{d,ges.}^2) \quad (4.175)$$

woraus mit Gleichung 4.170 und Gleichung 4.107

$$SNR_{dB} = (-10) \cdot \log_{10} (2^{-2R} \cdot \gamma(N, \varrho, \epsilon) + \sigma_K^2) \quad (4.176)$$

wird, wobei σ_K^2 die Kanalcodierungsverzerrung aus den Tabellen in Abschnitt 4.3 ist.

Die für die Evaluierung von Gleichung 4.176 verwendeten Werte sind in Tabelle 4.16 zusammengetragen.

Transformation	$P_{err} = 10^{-2}$		$P_{err} = 10^{-1}$	
	1D	sep. 2D	1D	sep. 2D
<i>KLT</i>	0,01	0,01	0,1	0,1
<i>DCT</i>	0,00948	0,00983	0,0954	0,0984
<i>DST</i>	0,00298	0,00052	0,0305	0,0088
<i>CCT</i> _{$\varepsilon=0,0$}	0,0083	0,00959	0,084	0,0963
<i>CCT</i> _{$\varepsilon=0,02$}	0,00608	0,00836	0,0634	0,0848
<i>CCT</i> _{$\varepsilon=0,2$}	0,000927	0,000364	0,0105	0,00487
<i>CCT</i> _{$\varepsilon=0,4$}	0,000784	0,000119	0,00842	0,00164

Tabelle 4.16: Für die Evaluierung der Gesamtbetrachtung verwendete σ_K^2 -Werte aus den Tabellen im Abschnitt 4.3 für das Szenario $N = 16$ bzw. separierbare 4×4 -Transformation und $\varrho = 0,96$.

4.4.1 Ergebnisse für eindimensionale AR(1)-Daten und Transformationen

Die numerischen Ergebnisse der Evaluierung von Gleichung 4.176 für eindimensionale AR(1)-Quellen und eindimensionale Transformationen der Transformationsbreite $N = 16$ und der Quellenkorrelation $\varrho = 0,96$ finden sich für $P_{err} = 10^{-2}$ in der Tabelle 4.17 und für $P_{err} = 10^{-1}$ in der Tabelle 4.18. Für die mit „-“ geführten Tabellenelemente lag die Ratenvorgabe unter der Mindestrate, die laut Gleichung 4.119 für die Optimalquantisierung nötig ist.

Die graphische Darstellung der Tabellendaten findet sich für $P_{err} = 10^{-2}$ in der Abbildung 4.19 bzw. mit Ausschluß der stark nichtorthonormalen CCT-Varianten in Abbildung 4.21, für die Fehlerrate $P_{err} = 10^{-1}$ sind die entsprechenden Abbildungen 4.20 bzw. 4.22.

Auffallend ist in allen Abbildungen und Tabellen das gute Abschneiden der DST, welche in der Gesamtbetrachtung durch ihre bessere Quellencodierungsleistung und damit geringerer Quantisierungsverzerrung (s. Abschnitt 4.2.3) bessere Ergebnisse erzielt als die nur schwach nichtorthogonale CCT-Variante ($\varepsilon = 0,02$).

In den Tabellen 4.19 und 4.20 sind die Raten aufgeführt, ab denen die jeweiligen CCT-Varianten bessere Ergebnisse erzielen als die DCT bzw. die CCT. Für den Vergleich mit der DCT ergibt sich, daß diese Mindestraten mit steigender Nichtorthogonalität ansteigen.

Der Grund dafür wird aus den Abbildungen 4.19 und 4.20 ersichtlich; durch die deutlich schlechter werdenden Quellencodierungseigenschaften der CCT mit steigendem ε (s. Abbildung 4.6) überwiegt für geringe Raten hinsichtlich der Gesamtbilanz die höhere Quantisierungsverzerrung gegenüber der erreichten Reduzierung der Kanalfehlerverzerrung.

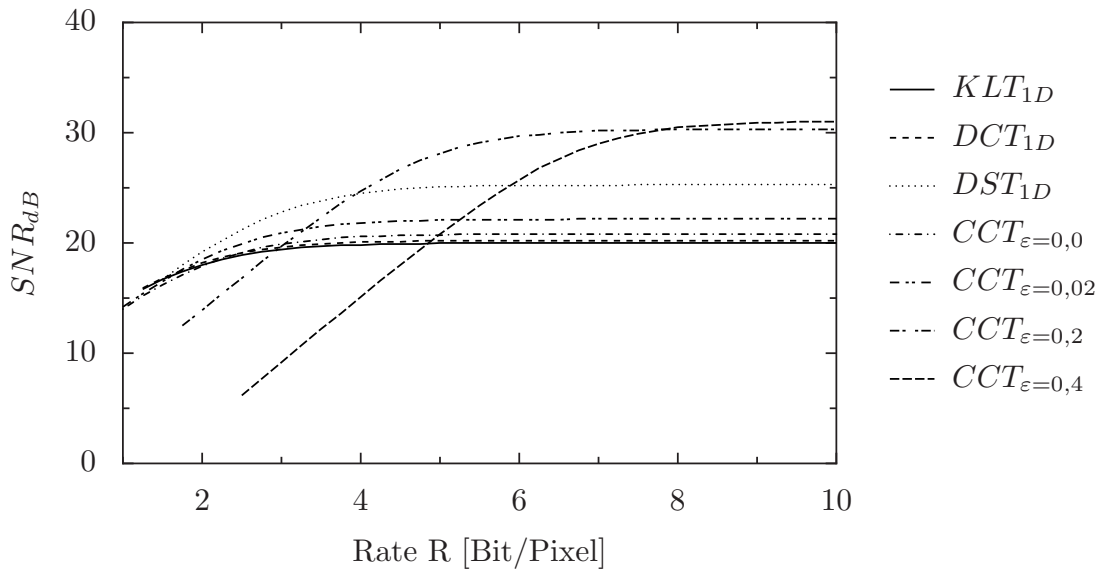


Abbildung 4.19: Ergebnisse der Gesamtbetrachtung für eindimensionale AR(1)-Daten und eindimensionale Transformationen für $N = 16$, $\rho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-2}$.

Erst bei höheren Raten (Abfall der Quantisierungsverzerrung mit dem Faktor 2^{-2R} bzw. um $\approx 6,02 \cdot R$ dB!) überwiegt der Einfluß der besseren Kanalfehlerkorrektur.

Nichtsdestotrotz ermöglicht die CCT den gewünschten Kompromiß zwischen Quellen- und Kanalcodierung, allerdings nach Einbeziehung der Quantisierungsfehler nicht mehr so überzeugend wie bei der Evaluierung an Videodaten im Abschnitt 3. Die guten Ergebnisse der DST geben Grund zu der Überlegung, diesen Kompromiß auch mit orthonormalen Transformationen zu erreichen. Ein Ansatz dazu ist im Abschnitt 5.2 skizziert.

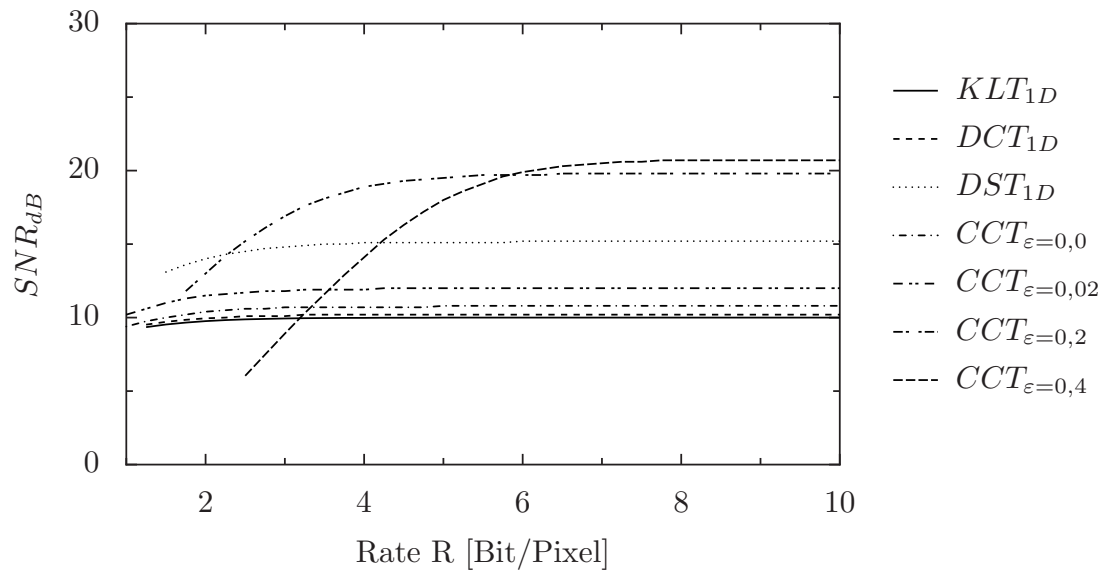


Abbildung 4.20: Ergebnisse der Gesamtbetrachtung für eindimensionale AR(1)-Daten und eindimensionale Transformationen für $N = 16$, $\varrho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-1}$.

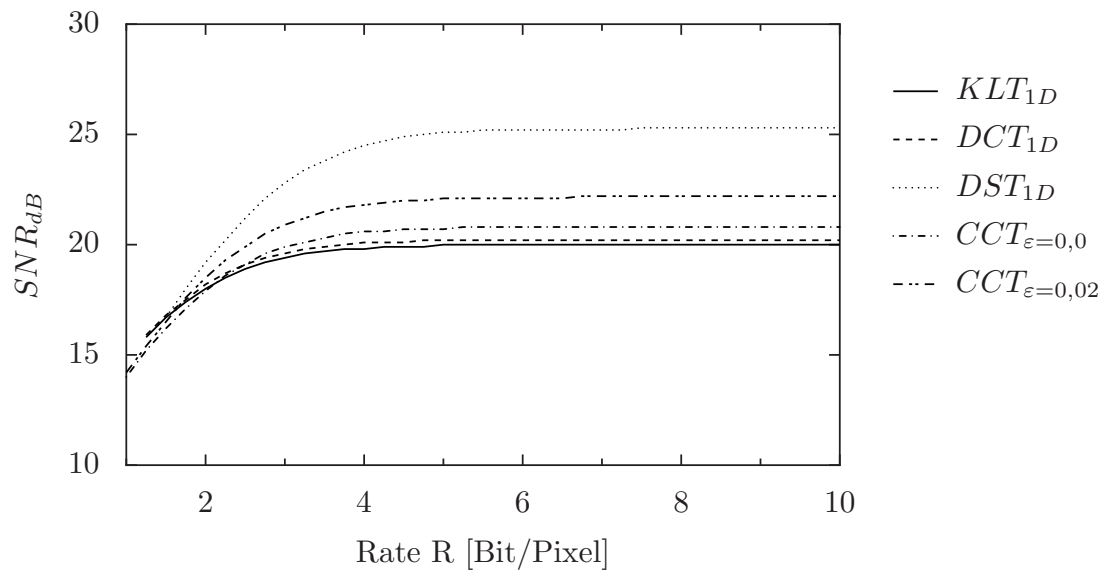


Abbildung 4.21: Ergebnisse der Gesamtbetrachtung für eindimensionale AR(1)-Daten und eindimensionale Transformationen für $N = 16$, $\varrho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-2}$ (reduzierte Transformationenanzahl).

R	SNR_{KLT}	SNR_{DCT}	SNR_{DST}	$CCT_{0,00}$	$CCT_{0,02}$	$CCT_{0,20}$	$CCT_{0,40}$
1	-	-	-	14	14.2	-	-
1.25	15.8	15.9	-	15.2	15.4	-	-
1.5	16.7	16.8	16.7	16.2	16.5	-	-
1.75	17.4	17.5	18	17.1	17.6	12.5	-
2	18	18.2	19.2	17.9	18.5	13.9	-
2.25	18.5	18.7	20.2	18.6	19.3	15.4	-
2.5	18.9	19.1	21.2	19.1	19.9	16.8	6.17
2.75	19.2	19.4	22.1	19.6	20.5	18.3	7.67
3	19.4	19.6	22.8	19.9	20.9	19.7	9.17
3.25	19.6	19.8	23.4	20.1	21.2	21	10.7
3.5	19.7	19.9	23.8	20.3	21.5	22.3	12.2
3.75	19.8	20	24.2	20.5	21.7	23.6	13.6
4	19.8	20.1	24.5	20.6	21.8	24.7	15.1
4.25	19.9	20.1	24.7	20.6	21.9	25.7	16.6
4.5	19.9	20.1	24.9	20.7	22	26.7	18
4.75	19.9	20.2	25	20.7	22	27.5	19.4
5	20	20.2	25.1	20.7	22.1	28.1	20.8
5.25	20	20.2	25.1	20.8	22.1	28.7	22.1
5.5	20	20.2	25.2	20.8	22.1	29.1	23.4
5.75	20	20.2	25.2	20.8	22.1	29.4	24.6
6	20	20.2	25.2	20.8	22.1	29.7	25.7
6.25	20	20.2	25.2	20.8	22.1	29.8	26.8
6.5	20	20.2	25.2	20.8	22.1	30	27.6
6.75	20	20.2	25.2	20.8	22.2	30.1	28.4
7	20	20.2	25.2	20.8	22.2	30.2	29
7.25	20	20.2	25.2	20.8	22.2	30.2	29.5
7.5	20	20.2	25.3	20.8	22.2	30.2	29.9
7.75	20	20.2	25.3	20.8	22.2	30.3	30.2
8	20	20.2	25.3	20.8	22.2	30.3	30.5
8.25	20	20.2	25.3	20.8	22.2	30.3	30.6
8.5	20	20.2	25.3	20.8	22.2	30.3	30.7
8.75	20	20.2	25.3	20.8	22.2	30.3	30.8
9	20	20.2	25.3	20.8	22.2	30.3	30.9
9.25	20	20.2	25.3	20.8	22.2	30.3	30.9
9.5	20	20.2	25.3	20.8	22.2	30.3	31
9.75	20	20.2	25.3	20.8	22.2	30.3	31
10	20	20.2	25.3	20.8	22.2	30.3	31

Tabelle 4.17: Ergebnisse der Gesamtbetrachtung für $N = 16$, $\varrho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-2}$ für eindimensionale AR(1)-Quellensignale und Transformationen.

R	SNR_{KLT}	SNR_{DCT}	SNR_{DST}	$CCT_{0,00}$	$CCT_{0,02}$	$CCT_{0,20}$	$CCT_{0,40}$
1	-	-	-	9.39	10.2	-	-
1.25	9.35	9.52	-	9.75	10.6	-	-
1.5	9.53	9.71	13.1	10	11	-	-
1.75	9.66	9.85	13.6	10.2	11.3	11.8	-
2	9.76	9.95	14	10.4	11.5	13	-
2.25	9.83	10	14.3	10.5	11.6	14.2	-
2.5	9.88	10.1	14.5	10.6	11.7	15.2	6.04
2.75	9.91	10.1	14.7	10.6	11.8	16.1	7.48
3	9.94	10.1	14.8	10.7	11.8	16.9	8.91
3.25	9.96	10.2	14.9	10.7	11.9	17.6	10.3
3.5	9.97	10.2	15	10.7	11.9	18.1	11.6
3.75	9.98	10.2	15	10.7	11.9	18.5	12.9
4	9.98	10.2	15.1	10.7	11.9	18.9	14.1
4.25	9.99	10.2	15.1	10.7	12	19.1	15.3
4.5	9.99	10.2	15.1	10.7	12	19.3	16.3
4.75	9.99	10.2	15.1	10.7	12	19.4	17.2
5	10	10.2	15.1	10.8	12	19.5	18
5.25	10	10.2	15.1	10.8	12	19.6	18.6
5.5	10	10.2	15.1	10.8	12	19.7	19.1
5.75	10	10.2	15.1	10.8	12	19.7	19.6
6	10	10.2	15.2	10.8	12	19.7	19.9
6.25	10	10.2	15.2	10.8	12	19.7	20.1
6.5	10	10.2	15.2	10.8	12	19.8	20.3
6.75	10	10.2	15.2	10.8	12	19.8	20.4
7	10	10.2	15.2	10.8	12	19.8	20.5
7.25	10	10.2	15.2	10.8	12	19.8	20.6
7.5	10	10.2	15.2	10.8	12	19.8	20.6
7.75	10	10.2	15.2	10.8	12	19.8	20.7
8	10	10.2	15.2	10.8	12	19.8	20.7
8.25	10	10.2	15.2	10.8	12	19.8	20.7
8.5	10	10.2	15.2	10.8	12	19.8	20.7
8.75	10	10.2	15.2	10.8	12	19.8	20.7
9	10	10.2	15.2	10.8	12	19.8	20.7
9.25	10	10.2	15.2	10.8	12	19.8	20.7
9.5	10	10.2	15.2	10.8	12	19.8	20.7
9.75	10	10.2	15.2	10.8	12	19.8	20.7
10	10	10.2	15.2	10.8	12	19.8	20.7

Tabelle 4.18: Ergebnisse der Gesamtbetrachtung für $N = 16$, $\varrho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-1}$ für eindimensionale AR(1)-Quellensignale und Transformationen.

Transformation	R_{besser} DCT	R_{besser} DST
$CCT_{\varepsilon=0,00}$	2.4	-
$CCT_{\varepsilon=0,02}$	1.7	-
$CCT_{\varepsilon=0,20}$	3	3.9
$CCT_{\varepsilon=0,40}$	4.9	5.9

Tabelle 4.19: Raten, ab denen die CCT bessere Ergebnisse erzielt als die DCT bzw. DST. Ergebnisse für $N = 16$, $\varrho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-2}$ für eindimensionale AR(1)-Quellensignale und Transformationen.

Transformation	R_{besser} DCT	R_{besser} DST
$CCT_{\varepsilon=0,00}$	1.1	-
$CCT_{\varepsilon=0,02}$	1.1	-
$CCT_{\varepsilon=0,20}$	1.5	2.3
$CCT_{\varepsilon=0,40}$	3.2	4.2

Tabelle 4.20: Raten, ab denen die CCT bessere Ergebnisse erzielt als die DCT bzw. DST. Ergebnisse für $N = 16$, $\varrho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-1}$ für eindimensionale AR(1)-Quellensignale und Transformationen.

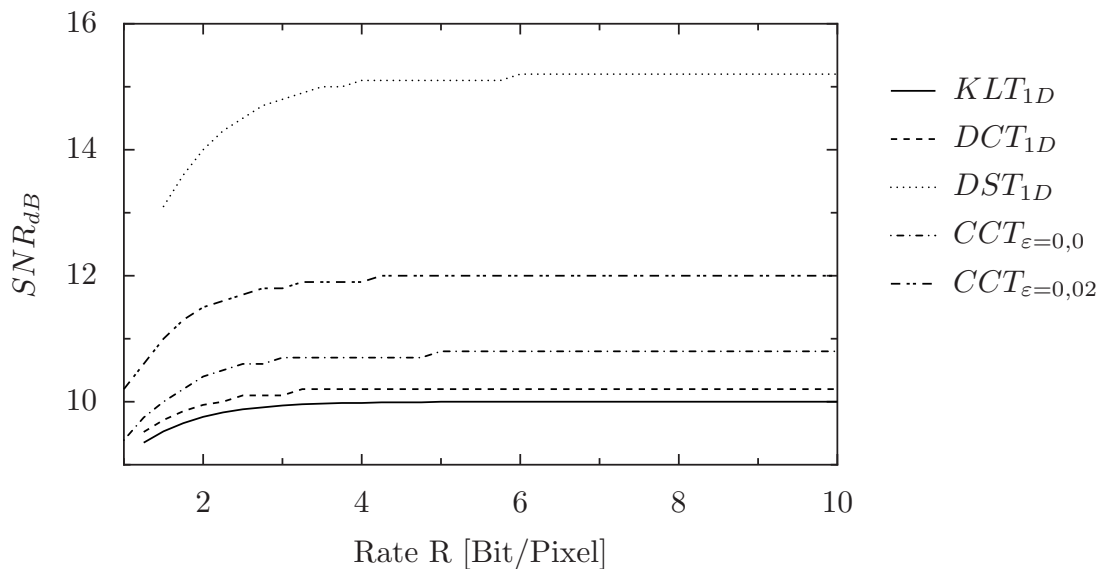


Abbildung 4.22: Ergebnisse der Gesamtbetrachtung für eindimensionale AR(1)-Daten und eindimensionale Transformationen für $N = 16$, $\varrho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-1}$ (reduzierte Transformationenanzahl).

4.4.2 Ergebnisse für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und separierbare Transformationen

Die numerischen Ergebnisse der Evaluierung von Gleichung 4.176 für separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellen und zweidimensionale separierbare 4×4 -Transformationen (realisiert durch äquivalente eindimensionale Transformationen der Breite $N = 16$) und der Quellenkorrelation $\varrho = 0,96$ finden sich für $P_{err} = 10^{-2}$ in der Tabelle 4.21 und für $P_{err} = 10^{-1}$ in der Tabelle 4.22. Für die mit „-“ geführten Tabellenelemente lag die Ratenvorgabe unter der Mindestrate, die laut Gleichung 4.119 für die Optimalquantisierung nötig ist.

Die graphische Darstellung der Tabellendaten findet sich für $P_{err} = 10^{-2}$ in der Abbildung 4.23 bzw. mit Ausschluß der stark nichtorthonormalen CCT-Varianten in Abbildung 4.25, für die Fehlerrate $P_{err} = 10^{-2}$ sind die entsprechenden Abbildungen 4.24 bzw. 4.26.

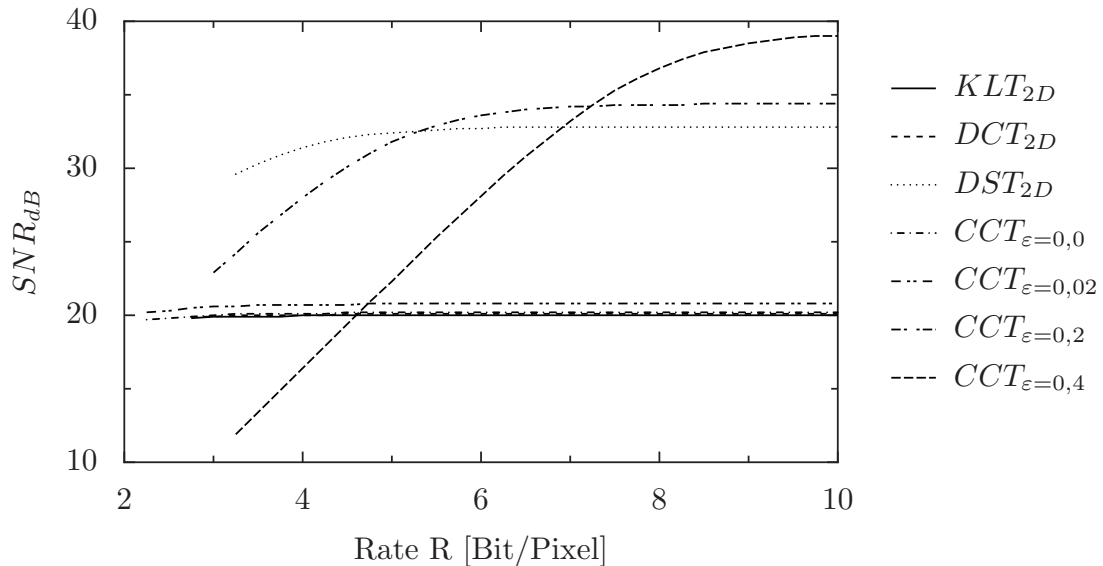


Abbildung 4.23: Ergebnisse der Gesamtbetrachtung für separierbare zweidimensionale AR(1)-Daten und separierbare zweidimensionale Transformationen für $N = 16$, $\varrho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-2}$.

Hinsichtlich der Auswertung ergeben sich gegenüber den Ergebnissen für das eindimensionale Szenario keine qualitativ neuen Erkenntnisse, außer daß der Vorsprung der DST noch weiter angewachsen ist. Im Gegensatz zum eindimensionalen Szenario ist für die Fehlerrate $P_{err} = 10^{-2}$ im Falle der $CCT_{\epsilon=0,2}$ nun eine Mindestrate von 5,3 Bit/Pixel statt 3,9 Bit/Pixel nötig, um bessere Ergebnisse zu erzielen als die DST. Dies zeigt sich auch in der geringeren Kanalcodierungsverzerrung σ_K^2 der DST in Tabelle 4.16.

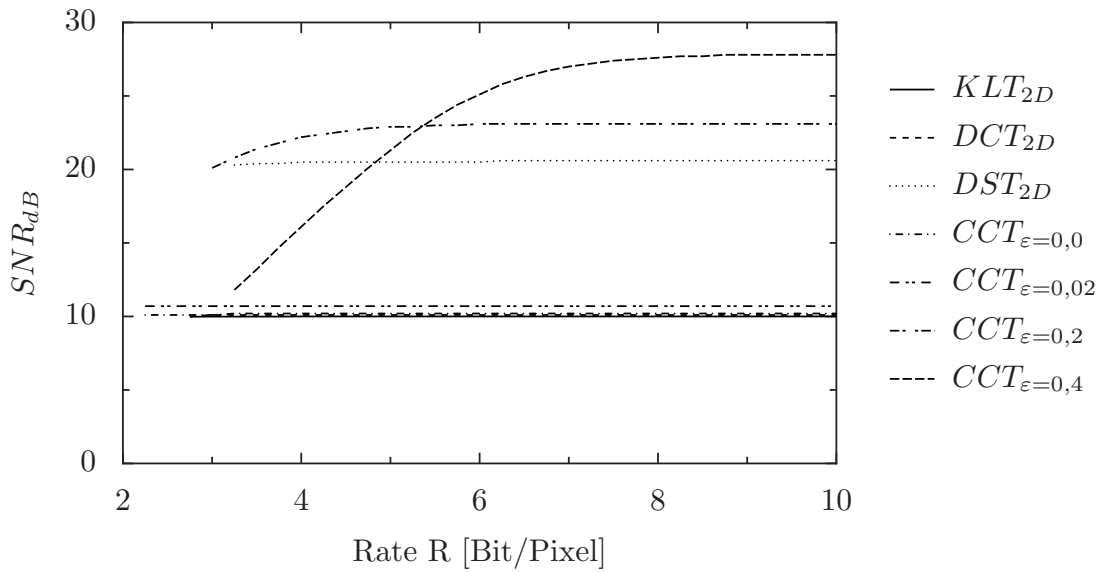


Abbildung 4.24: Ergebnisse der Gesamtbetrachtung für separierbare zweidimensionale AR(1)-Daten und separierbare zweidimensionale Transformationen für $N = 16$, $\varrho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-1}$.

Die DST ist die einzige Transformation, bei der sich die Kanalverzerrung zwischen dem eindimensionalen und dem separierbaren zweidimensionalen Szenario um fast eine Größenordnung verkleinert. Auch die Ergebnisse für separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellen und separierbare Transformationen legen den Übergang zu dem in Abschnitt 5.2 skizzierten Weg nahe.

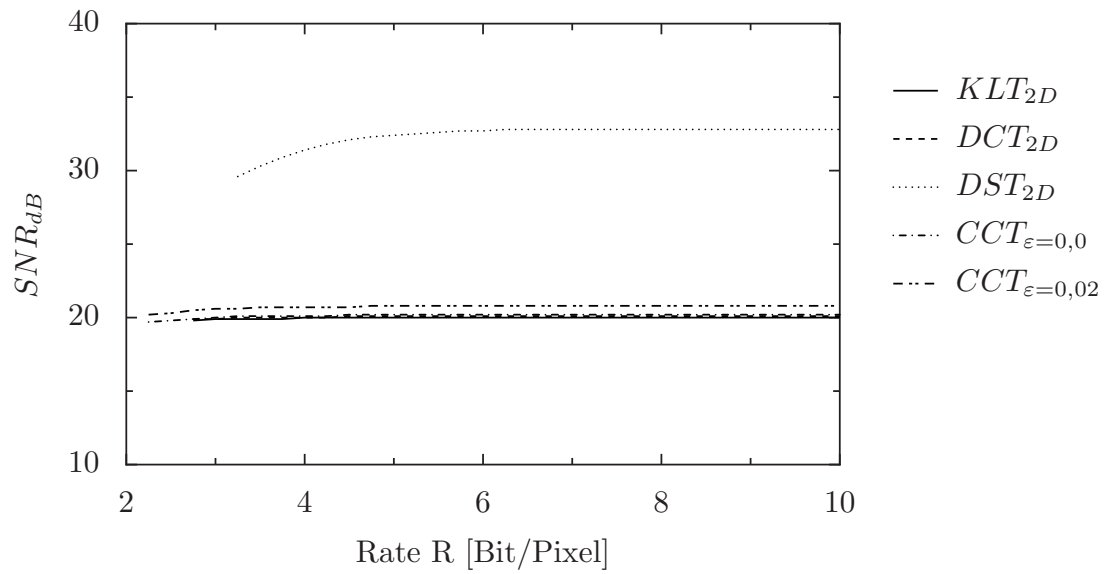


Abbildung 4.25: Ergebnisse der Gesamtbetrachtung für separierbare zweidimensionale AR(1)-Daten und separierbare zweidimensionale Transformationen für $N = 16$, $\varrho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-2}$ (reduzierte Transformationenanzahl).

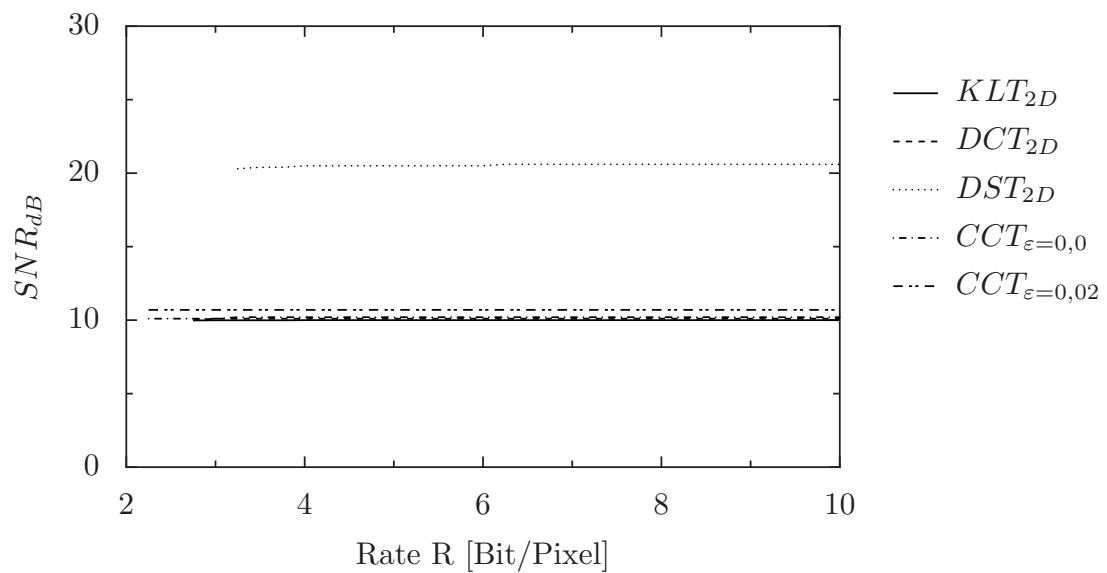


Abbildung 4.26: Ergebnisse der Gesamtbetrachtung für separierbare zweidimensionale AR(1)-Daten und separierbare zweidimensionale Transformationen für $N = 16$, $\varrho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-1}$ (reduzierte Transformationenanzahl).

R	SNR_{KLT}	SNR_{DCT}	SNR_{DST}	$CCT_{0,00}$	$CCT_{0,02}$	$CCT_{0,20}$	$CCT_{0,40}$
1	-	-	-	-	-	-	-
1.25	-	-	-	-	-	-	-
1.5	-	-	-	-	-	-	-
1.75	-	-	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-	-
2.25	-	-	-	19.7	20.2	-	-
2.5	-	-	-	19.8	20.3	-	-
2.75	19.8	19.9	-	19.9	20.5	-	-
3	19.9	19.9	-	20	20.6	22.9	-
3.25	19.9	20	29.6	20.1	20.6	24.2	11.9
3.5	19.9	20	30.3	20.1	20.7	25.6	13.4
3.75	19.9	20	30.9	20.1	20.7	26.8	14.9
4	20	20	31.4	20.1	20.7	28	16.4
4.25	20	20	31.8	20.1	20.7	29.1	17.9
4.5	20	20.1	32.1	20.2	20.7	30.1	19.4
4.75	20	20.1	32.3	20.2	20.8	31	20.9
5	20	20.1	32.4	20.2	20.8	31.8	22.3
5.25	20	20.1	32.5	20.2	20.8	32.4	23.8
5.5	20	20.1	32.6	20.2	20.8	32.9	25.3
5.75	20	20.1	32.7	20.2	20.8	33.3	26.7
6	20	20.1	32.7	20.2	20.8	33.6	28.1
6.25	20	20.1	32.8	20.2	20.8	33.8	29.5
6.5	20	20.1	32.8	20.2	20.8	34	30.8
6.75	20	20.1	32.8	20.2	20.8	34.1	32
7	20	20.1	32.8	20.2	20.8	34.2	33.2
7.25	20	20.1	32.8	20.2	20.8	34.2	34.3
7.5	20	20.1	32.8	20.2	20.8	34.3	35.3
7.75	20	20.1	32.8	20.2	20.8	34.3	36.1
8	20	20.1	32.8	20.2	20.8	34.3	36.8
8.25	20	20.1	32.8	20.2	20.8	34.3	37.4
8.5	20	20.1	32.8	20.2	20.8	34.4	37.9
8.75	20	20.1	32.8	20.2	20.8	34.4	38.2
9	20	20.1	32.8	20.2	20.8	34.4	38.5
9.25	20	20.1	32.8	20.2	20.8	34.4	38.7
9.5	20	20.1	32.8	20.2	20.8	34.4	38.9
9.75	20	20.1	32.8	20.2	20.8	34.4	39
10	20	20.1	32.8	20.2	20.8	34.4	39

Tabelle 4.21: Ergebnisse der Gesamtbetrachtung für $N = 16$, $\varrho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-2}$ für separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellensignale und Transformationen.

R	SNR_{KLT}	SNR_{DCT}	SNR_{DST}	$CCT_{0,00}$	$CCT_{0,02}$	$CCT_{0,20}$	$CCT_{0,40}$
1	-	-	-	-	-	-	-
1.25	-	-	-	-	-	-	-
1.5	-	-	-	-	-	-	-
1.75	-	-	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-	-
2.25	-	-	-	10.1	10.7	-	-
2.5	-	-	-	10.1	10.7	-	-
2.75	9.98	10	-	10.1	10.7	-	-
3	9.99	10.1	-	10.1	10.7	20.1	-
3.25	9.99	10.1	20.3	10.2	10.7	20.8	11.8
3.5	9.99	10.1	20.4	10.2	10.7	21.4	13.2
3.75	9.99	10.1	20.4	10.2	10.7	21.8	14.7
4	10	10.1	20.5	10.2	10.7	22.2	16.1
4.25	10	10.1	20.5	10.2	10.7	22.4	17.5
4.5	10	10.1	20.5	10.2	10.7	22.6	18.8
4.75	10	10.1	20.5	10.2	10.7	22.8	20.1
5	10	10.1	20.5	10.2	10.7	22.9	21.3
5.25	10	10.1	20.5	10.2	10.7	22.9	22.5
5.5	10	10.1	20.5	10.2	10.7	23	23.5
5.75	10	10.1	20.5	10.2	10.7	23	24.4
6	10	10.1	20.5	10.2	10.7	23.1	25.1
6.25	10	10.1	20.6	10.2	10.7	23.1	25.8
6.5	10	10.1	20.6	10.2	10.7	23.1	26.3
6.75	10	10.1	20.6	10.2	10.7	23.1	26.7
7	10	10.1	20.6	10.2	10.7	23.1	27
7.25	10	10.1	20.6	10.2	10.7	23.1	27.2
7.5	10	10.1	20.6	10.2	10.7	23.1	27.4
7.75	10	10.1	20.6	10.2	10.7	23.1	27.5
8	10	10.1	20.6	10.2	10.7	23.1	27.6
8.25	10	10.1	20.6	10.2	10.7	23.1	27.7
8.5	10	10.1	20.6	10.2	10.7	23.1	27.7
8.75	10	10.1	20.6	10.2	10.7	23.1	27.8
9	10	10.1	20.6	10.2	10.7	23.1	27.8
9.25	10	10.1	20.6	10.2	10.7	23.1	27.8
9.5	10	10.1	20.6	10.2	10.7	23.1	27.8
9.75	10	10.1	20.6	10.2	10.7	23.1	27.8
10	10	10.1	20.6	10.2	10.7	23.1	27.8

Tabelle 4.22: Ergebnisse der Gesamtbetrachtung für $N = 16$, $\varrho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-1}$ für separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellensignale und Transformationen.

Transformation	R_{besser} DCT	R_{besser} DST
$CCT_{\varepsilon=0,00}$	2.6	-
$CCT_{\varepsilon=0,02}$	2.6	-
$CCT_{\varepsilon=0,20}$	3	5.3
$CCT_{\varepsilon=0,40}$	4.6	6.9

Tabelle 4.23: Raten, ab denen die CCT bessere Ergebnisse erzielt als die DCT bzw. DST. Ergebnisse für $N = 16$, $\varrho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-2}$ für separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellensignale und Transformationen.

Transformation	R_{besser} DCT	R_{besser} DST
$CCT_{\varepsilon=0,00}$	2.6	-
$CCT_{\varepsilon=0,02}$	2.6	-
$CCT_{\varepsilon=0,20}$	3	3.1
$CCT_{\varepsilon=0,40}$	3.1	4.8

Tabelle 4.24: Raten, ab denen die CCT bessere Ergebnisse erzielt als die DCT bzw. DST. Ergebnisse für $N = 16$, $\varrho = 0,96$ und $P_{err} = 10^{-1}$ für separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellensignale und Transformationen.

4.5 Verifikation der Gesamtbetrachtung

Zur Verifikation der Ergebnisse aus dem Abschnitt 4.4 wurde das Simulationsprogramm *AR1Simulation* geschrieben, welches gemäß dem gewählten Szenario eindimensionale bzw. separierbare zweidimensionale AR(1)-Daten blockweise transformiert, die N Transformationskoeffizienten jeweils optimalquantisiert (Max-Lloyd-Algorithmus) und anschließend mit einer adaptiven Huffmancodierung² entropiecodiert und sie dann wieder über N separate Kanäle überträgt.

Die Ausfälle werden auf jedem der unabhängigen Kanäle durch ein gedächtnisloses Ausfallmodell mit konstanter Ausfallwahrscheinlichkeit P_{err} modelliert.

Wahlweise kann die Entropie des Transformationskoeffizientenvektors auch histogrammbasierend (s.u.) geschätzt werden.

Empfängerseitig werden die Daten nach der inversen Entropiecodierung / Quantisierung mittels einer inversen Transformation rekonstruiert. Traten keine Übertragungsfehler auf, wird die normale inverse Transformation benutzt.

Ansonsten wurde die optimale Rekonstruktionsmatrix gemäß 2.106 verwendet, nur bei dem Ausfall aller Koeffizienten wurde zum Mittelwert der Eingangswerte geschätzt.

Zu Vergleichszwecken kann mit der *-NurInvTrans*-Option auch ausschließlich die normale inverse Transformation benutzt werden.

In Abwandlung zu den theoretischen Betrachtungen im Abschnitt 4.4 werden standardmäßig, wenn die Option *NullQuantFV* nicht explizit negiert wird, auch die Koeffizienten, die von der Bitzuteilungsberechnung 0 Bit zugewiesen bekommen haben, in den Fehlervektor aufgenommen. Somit wird versucht, die Einflüsse der Quantisierung auf die Rekonstruktion durch das Schätzverfahren zu verbessern. Dies gilt selbstverständlich nur bei abgeschalteter *-NurInvTrans*-Option.

Die Bitzuteilung selbst basiert auf der Formel 4.27, wobei die nötige Ableitung zu ganzzahligen Bitraten gemäß dem als Algorithmus 1 beschriebenen Algorithmus erfolgt. Die Umsetzung dieses Algorithmuses erfolgt in der Unteroutine *berechneRaten(R, Ryy, Raten)*.

Der Gesamtalgorithmus der Simulation ist gemäß Algorithmus 2 definiert.

Über die vom Programm *Kanalcodierung++* schon bekannten Hilfsklassen hinaus sind folgende Hilfsklassen implementiert worden:

MaxLloydQuantizer Implementierung eines adaptiven Optimalquantisierers nach dem Max-Lloyd-Algorithmus.

HuffmanCoder Implementierung eines adaptiven Huffman-Entropiecodierers /

²Verfahren zur Entropiecodierung, beschrieben in [Huf52].

Algorithm 1 Optimale Bitzuweisung

```

for  $k = 0$  to  $N - 1$  do
     $R_k \leftarrow R + \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left( \frac{\sigma_{y_k}^2}{\sqrt[N]{\prod_{l=0}^{N-1} \sigma_{y_l}^2}} \right)$ 
end for
 $inkrement \leftarrow 0$ 
repeat
    for  $k = 0$  bis  $N - 1$  do
        if  $R_k + inkrement > 0$  then
             $Raten_k \leftarrow [R_k + inkrement + 0, 5]$ 
        else
             $Raten_k \leftarrow 0$ 
        end if
         $inkrement \leftarrow inkrement + 0.1$ 
    end for
until  $\frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^N Raten_k \geq R$ 

```

Dekodierers.

Estimator Implementierung des MSE-optimalen Schätzalgorithmus nach Gleichung 2.106.

LatexTableLogger Hilfsklasse zur bequemen Protokollierung der Daten in L^AT_EX-Tabellen.

AR1_Sep2D_Src Implementierung einer zweidimensionalen separierbaren AR(1)-Quelle.

DiscreteHistogram Implementierung eines Histogramms zur Entropieberechnung für quantisierte Signale.

Das Programm selbst wird über Kommandozeilenoptionen parameterisiert, welche beim Programmstart ohne Parameter oder mit dem *-h*-Parameter angezeigt werden. Diese sind im Einzelnen:

-h Ausgabe der Programmnutzungsbeschreibung.

-m Logarithmus dualis der Transformationsbreite N ($N = 2^m$).

-rho Quellenkorrelation ρ für das AR(1)-Quellenmodell.

-Perr Koeffizientenausfallwahrscheinlichkeit P_{err} .

Algorithm 2 Gesamtalgorithmus der AR(1)-Simulation

$N \times N_{Versuche}$ -Matrix mit AR(1)-Daten generieren.
 \mathbf{R}_{xx} und σ_x^2 berechnen.
 $N \times N_{Versuche}$ -Matrix der Fehlermuster \mathbf{E} (Koeffizientenausfall) berechnen.
Transformationen \mathbf{T} und inverse Transformationen \mathbf{T}^{-1} berechnen.
 \mathbf{y} und \mathbf{R}_{yy} für alle Transformationen berechnen.
for alle Raten R **do**
 for alle Transformationen **do**
 Optimale Bitzuweisung aus \mathbf{R}_{yy} berechnen $\rightarrow Raten$
 $\hat{H}_y \leftarrow 0$
 for alle Transformationskoeffizienten $k = 0$ bis $N - 1$ **do**
 if $Raten_k > 0$ **then**
 Quantisierer auf Zielrate setzen und mit $\mathbf{y}(k, :)$ trainieren.
 k -te Zeile von \mathbf{y} quantisieren $\rightarrow \mathbf{y}_q$, inverse Quantisierung zu \mathbf{y}_r .
 Huffmancoder/Histogramm mit \mathbf{y}_q trainieren.
 $\hat{H}_y \leftarrow \hat{H}_y + \text{Huffman/Histogrammentropie}$.
 $nullquant_k \leftarrow 1$
 else
 $nullquant_k \leftarrow 0$
 end if
 end for
 Entropierate für die aktuelle Transformation $= \frac{\hat{H}_y}{N}$.
 $\sigma_d^2 \leftarrow 0$
 for $versuch = 0$ bis $N_{Versuche} - 1$ **do**
 Fehlervektor $e = \{e_k \mid e_k = nullquant_k \cdot \mathbf{E}(k, versuch)\}$
 if Alles ausgefallen **then**
 $\sigma_d^2 \leftarrow \sigma_d^2 + \sum_{l=0}^{N-1} \mathbf{X}(l, versuch)^2$
 else if Nichts ausgefallen **then**
 $\mathbf{x}_r = \mathbf{T}_{inv.} \cdot \mathbf{y}_r(:, versuch)$
 $\sigma_d^2 \leftarrow \sigma_d^2 + \sum_{l=0}^{N-1} (x_{r_l} - \mathbf{X}(l, versuch))^2$
 else
 Berechne \mathbf{y}_r , \mathbf{T}_r und $\mathbf{R}_{y_r y_r}$
 $\mathbf{T}_{opt.} \leftarrow (\mathbf{R}_{y_r y_r}^{-1} \cdot \mathbf{T}_r \cdot \mathbf{R}_{xx})^H$
 $\mathbf{x}_r = \mathbf{T}_{opt.} \cdot \mathbf{X}(:, versuch)$
 $\sigma_d^2 \leftarrow \sigma_d^2 + \sum_{l=0}^{N-1} (x_{r_l} - \mathbf{X}(l, versuch))^2$
 end if
 end for
 $\sigma_d^2 \leftarrow \frac{\sigma_d^2}{N \cdot N_{Versuche}}, SNR_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_d^2} \right)$
 end for
end for

- Rmin** Minimaler Wert für die Datenrate R .
- Rschr** Schrittweite für die Datenrate R .
- Rmax** Maximaler Wert für die Datenrate R .
- Nsim** Anzahl an Übertragungsversuchen.
- epsilons** Liste von ϵ -Parametern für die CCT.
- locale** Ländertypische Einstellungen / Zeichensatzcodierung für die Ausgabe in den \LaTeX -Tabellen.
- NurInvTrans** Verwende für die Rekonstruktion ausschließlich die inverse Transformation statt dem Schätzer.
- nurNkoeff** Mit diesem Parameter kann optional angegeben werden, daß nur für die ersten N_{Limit} Transformationskoeffizienten eine Schätzlösung errechnet werden soll. N_{Limit} muß dann als Parameter mit übergeben werden.
- NullQuantFV** Mit diesem Schalter kann bestimmt werden, ob die zu Null quantisierten Koeffizienten zum Fehlervektor hinzugerechnet werden oder nicht.
- Sep2DAR1** Mit diesem Schalter kann statt des eindimensionalen AR(1)-Quellenmodells ein separierbares zweidimensionales Quellenmodell verwendet werden.
- OrthoSep2D** Mit diesem Schalter kann (nur in Verbindung mit *-Sep2DAR1*) die Verwendung von zweidimensionalen separierbaren Transformationen für die orthonormalen Transformationen aktiviert werden.
- HistEnt** Bei Verwendung dieser Option wird die Entropierate nicht mehr über die Ausgangsbits der Huffman-Codierung bestimmt sondern über die Schätzung der Amplitudendichteverteilung durch relative Häufigkeiten \hat{p}_k gemäß

$$\hat{H}_y = (-1) \cdot \sum_{k=0}^{2^{Bits}-1} \hat{p}_k \cdot \log_2(\hat{p}_k) \quad (4.177)$$

berechnet.

Das Programm generiert zum einen eine Textdatei, welche in jeder Zeile nach der Zielrate für jede Transformation die ermittelte Entropierate und den erreichten SNR_{dB} auflistet, und zwei \LaTeX -Tabellen. Die erste beinhaltet für alle Transformationen die benötigte Entropierate bei gegebener Zielrate, die andere den erreichten SNR_{dB} .

4.5.1 Ergebnisse für eindimensionale AR(1)-Signale

Zuerst werden wieder die Ergebnisse für das eindimensionale AR(1)-Modell und eindimensionale Transformationen vorgestellt, welches zwar für die Bildsignalverarbeitung von geringerer Bedeutung ist und auch für die Modellierung der Bilddaten für den Dekoder wenig geeignet ist (s. Abschnitt 3.2.1), nichtsdestotrotz aber in anderen Bereichen eine große Bedeutung haben.

Bevor die Ergebnisse der Simulation mit den Ergebnissen der theoretischen Gesamtbilanz aus dem Abschnitt 4.4 verglichen werden, sollen diese erst einmal für sich betrachtet werden.

Im Gegensatz zur Analyse der Ergebnisse für separierbare zweidimensionale AR(1)-Daten wird die Analyse recht kurz gefaßt, da die Evaluierung des eindimensionalen Szenarios nur mit zur Verifikation der Ergebnisse für die Gesamtbetrachtung aus dem Abschnitt 4.4 dienen soll.

Eine Überraschung ergab sich bei der Verwendung des Huffman-Codierers zur Ermittlung der Entropierate. Während für Zielraten $R \leq 4 \text{ Bit/Pixel}$ die Entwicklung noch einigermaßen linear ist (in Abbildung 4.27), entwickelt sich die Ausgangsrate der Huffman-Codierer für höhere Raten zunehmend exponentiell.

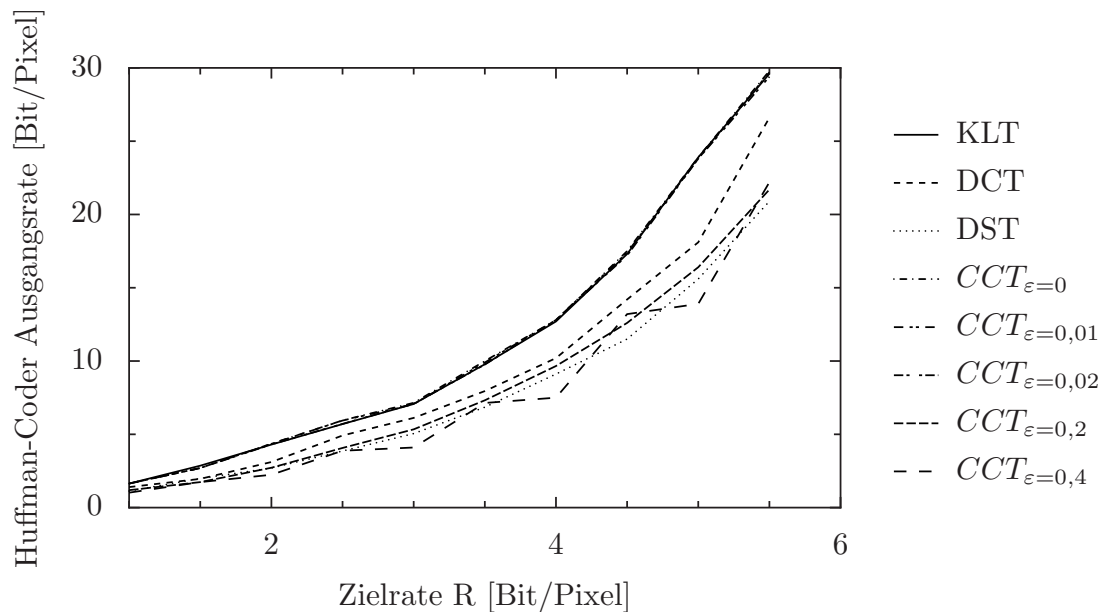


Abbildung 4.27: Entwicklung der Huffmancodierer-Ausgangsrate in Abhängigkeit von der Zielrate für alle Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 1000000 Versuche gemittelt).

Zur Klärung dieses Sachverhalts wurde der Mechanismus der Ratenzuweisung

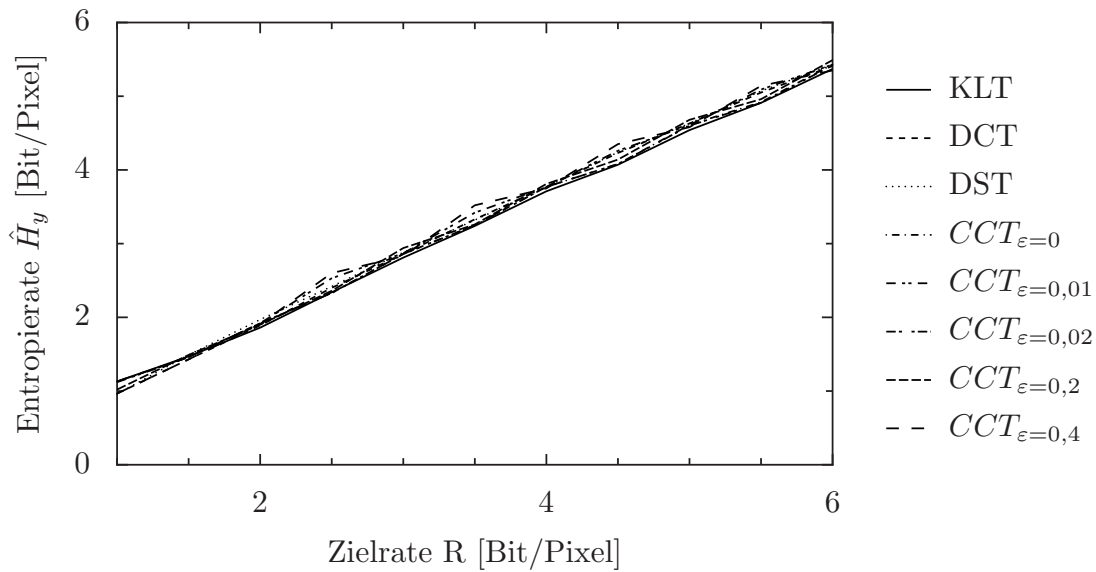


Abbildung 4.28: Entwicklung der über die Histogramm-Methode geschätzten Entropie in Abhängigkeit von der Zielrate für alle Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 1000000 Versuche gemittelt).

sowie die Komponenten Entropiecodierer und Max-Lloyd-Quantisierer separat getestet.

Der Max-Lloyd-Quantisierer erzielte im Test mit laplaceverteilten Zufallsdaten bis auf eine Nachkommastellen die gleichen Ergebnisse wie Prof. Noll sie für diesen Quantisierer in [PN08d] dokumentiert hat.

Der Huffman-Codierer wurde mit Zählsequenzen $[1 \dots M]$ mit $M < N$ (N - Eingangsstufenzahl des Entropiecodierers) getestet.

Allerdings erreicht der Huffman-Codierer lt. [Nol00] die Entropierate nur dann, wenn die Auftretenswahrscheinlichkeiten der zu codierenden Symbole Potenzen 2^{-k} , $k \in \mathbb{N}_+$ sind.

Im Rahmen einer tatsächlichen Umsetzung wird somit eine Ratenkontrollschleife unerlässlich sein. Da hier aber eine *distortion-rate*-Untersuchung verifiziert werden soll, wird für die weiteren Untersuchungen die schon bei der Evaluierung anhand von Videodaten im Kapitel 3 eingesetzte Schätzung der Entropie gemäß

$$\hat{H}_y = (-1) \cdot \sum_{k=0}^{2^{Bits}-1} \hat{p}_k \cdot \log_2(\hat{p}_k) \quad (4.178)$$

verwendet, wobei die Auftretenswahrscheinlichkeiten der quantisierten Symbole $\hat{p}_k = P(y_q = q_k)$ über ein Histogramm als relative Häufigkeit geschätzt wird.

Mit der Bestimmung der Entropierate über das Histogrammverfahren ergibt sich ein nahezu linearer Zusammenhang zwischen Ratenzuweisung und Entropierate (s. Abbildung 4.28).

Die Ergebnisse sind exemplarisch für $P_{err} = 10^{-2}$ in den Abbildungen 4.29 bis 4.31 dargestellt. Bis auf die im Abschnitt 4.5.2 beschriebenen Abweichungen ergeben sich keine Änderungen zu den Aussagen im Abschnitt 4.4.

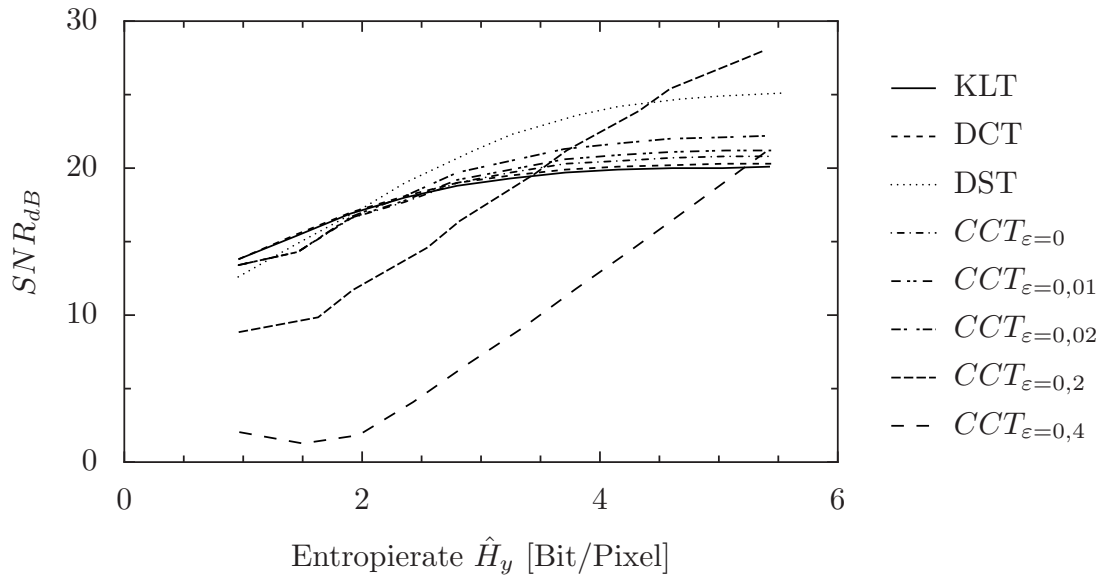


Abbildung 4.29: Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Entropierate für alle Transformationen und für eindimensionale AR(1)-Daten und eindimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

4.5.2 Vergleich mit der theoretischen Gesamtbetrachtung für das eindimensionale Szenario.

Der Vergleich der theoretischen Vorhersage laut Gleichung 4.176 mit den Simulationsergebnissen zeigt für die KLT (s. Abbildung 4.32), die DCT (s. Abbildung 4.33), die orthogonale CCT (s. Abbildung 4.35) und die leicht nichtorthogonalen CCT-Varianten mit $\varepsilon = 0,02$ (s. Abbildung 4.36) bis auf kleine Abweichungen für geringe Raten sehr gute Übereinstimmungen.

Für die DST ergeben sich gemäß Abbildung 4.34 etwas größere Abweichungen für den Bereich geringerer Raten, die Simulationsergebnisse für die stärker nichtorthogonalen CCT-Varianten mit $\varepsilon = 0,2$ bzw. $\varepsilon = 0,4$ liegen gemäß den Abbildungen 4.37 und 4.38 leicht unter den theoretischen Vorhersagen.

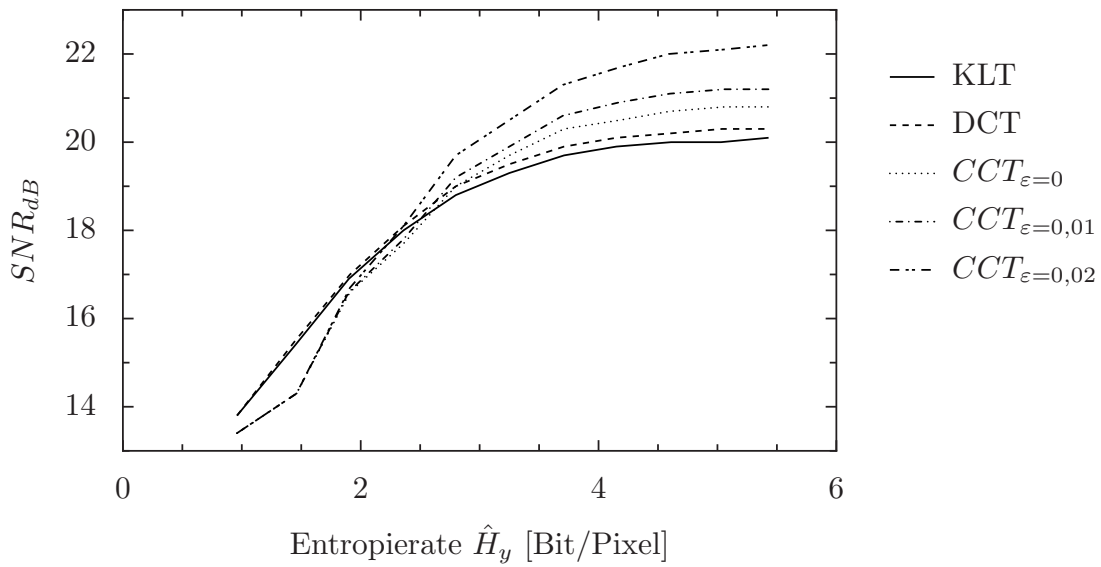


Abbildung 4.30: Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Entropierate für die enge Gruppe von Transformationen und für eindimensionale AR(1)-Daten und eindimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

Zusammenfassend kann mit diesen Ergebnissen die im Abschnitt 4.4 erarbeitete Gesamtbetrachtung durch die Simulationsergebnisse für eindimensionale AR(1)-Quellensignale und eindimensionale Transformationen bestätigt wird.

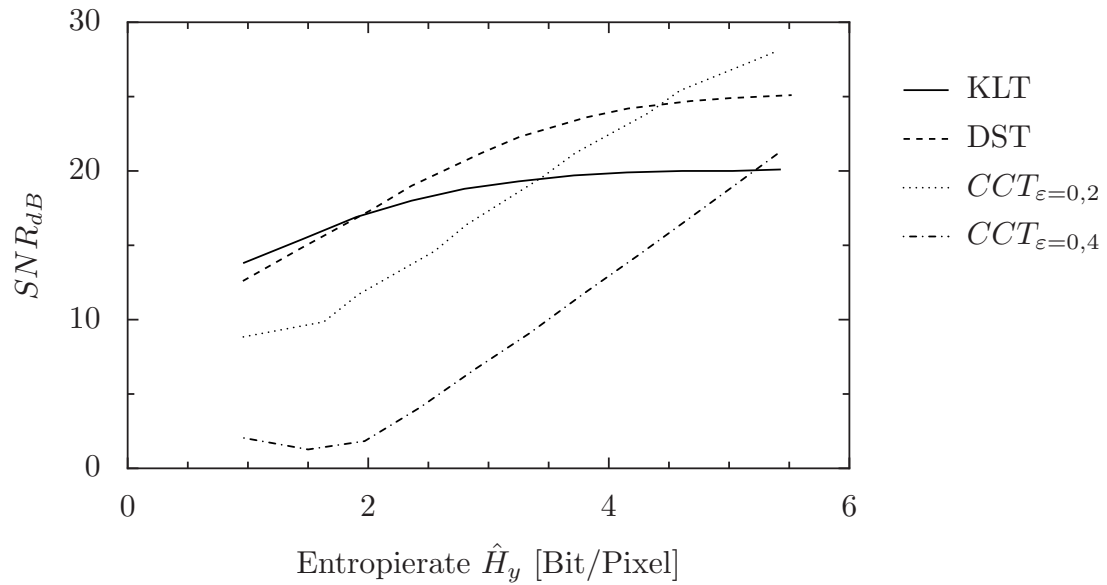


Abbildung 4.31: Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Entropierate für die abweichende Gruppe von Transformationen und für eindimensionale AR(1)-Daten und eindimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

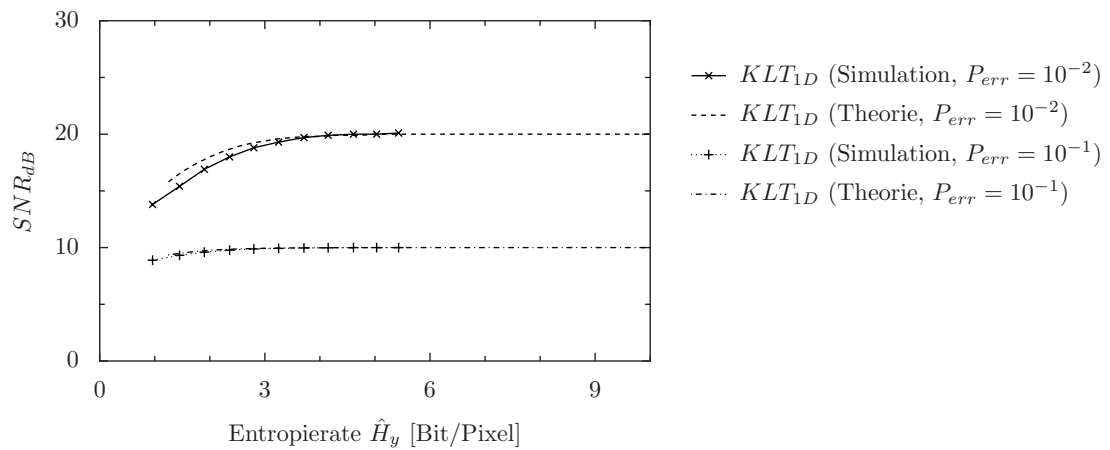


Abbildung 4.32: Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für eindimensionale AR(1)-Signale und die eindimensionale KLT ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 1D AR(1)-Modell).

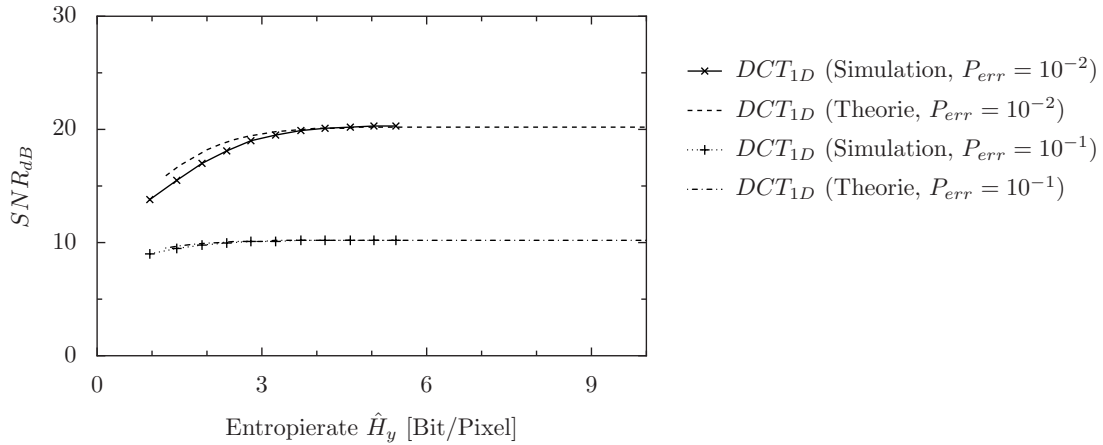


Abbildung 4.33: Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für eindimensionale AR(1)-Signale und die eindimensionale DCT ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 1D AR(1)-Modell).

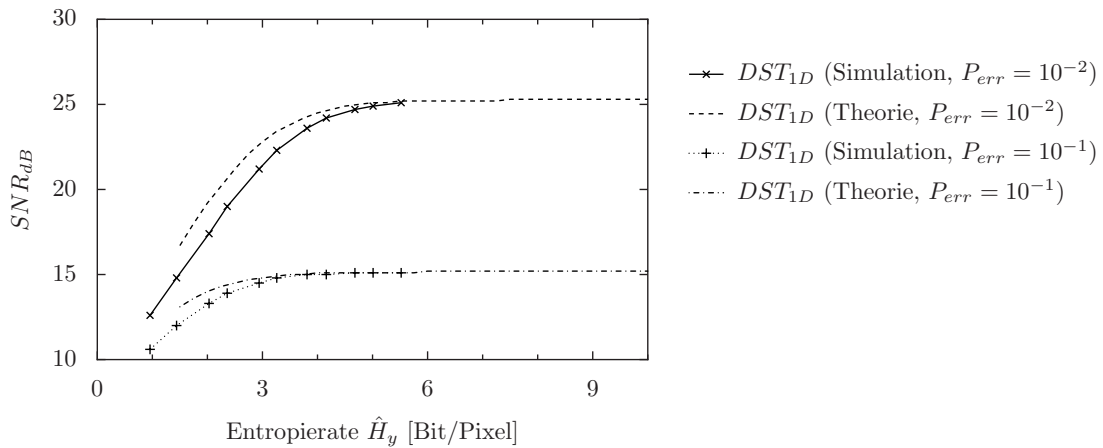


Abbildung 4.34: Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für eindimensionale AR(1)-Signale und die eindimensionale DST ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 1D AR(1)-Modell).

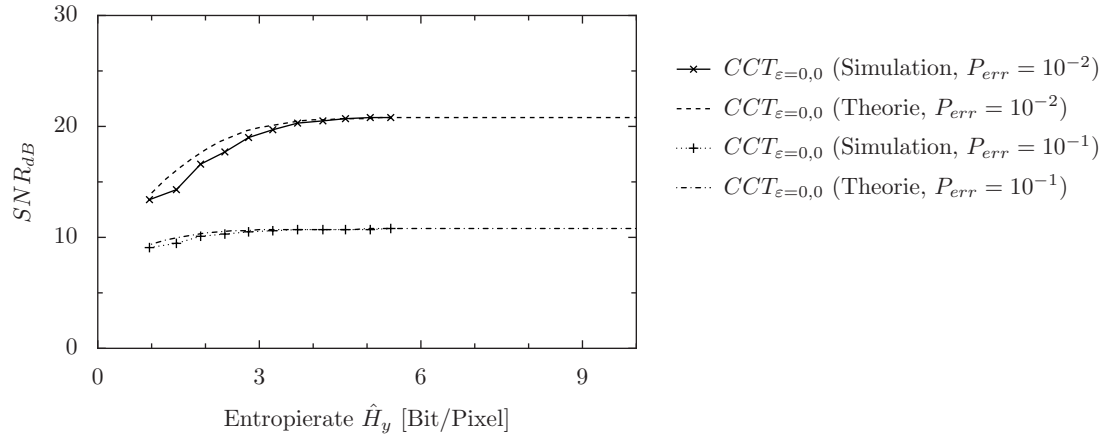


Abbildung 4.35: Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für eindimensionale AR(1)-Signale und die $CCT_{\epsilon=0}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 1D AR(1)-Modell).

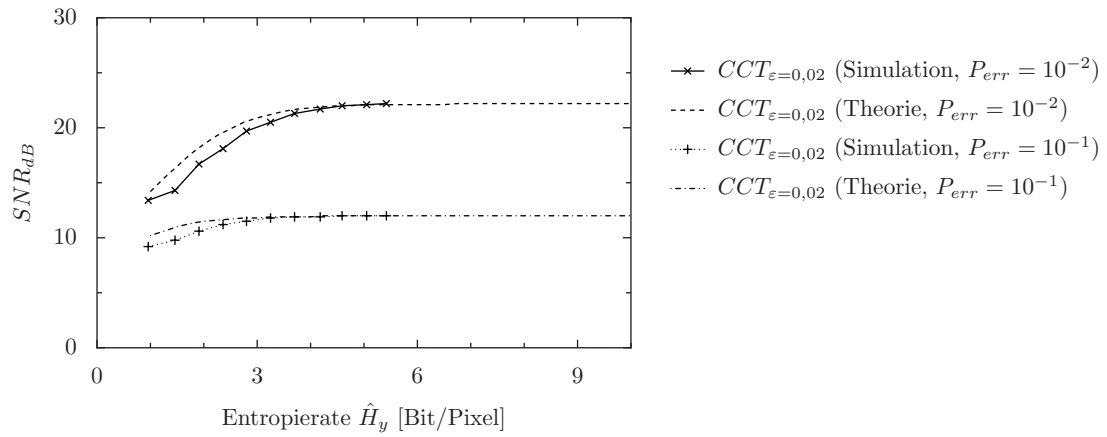


Abbildung 4.36: Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für eindimensionale AR(1)-Signale und die $CCT_{\epsilon=0,02}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 1D AR(1)-Modell).

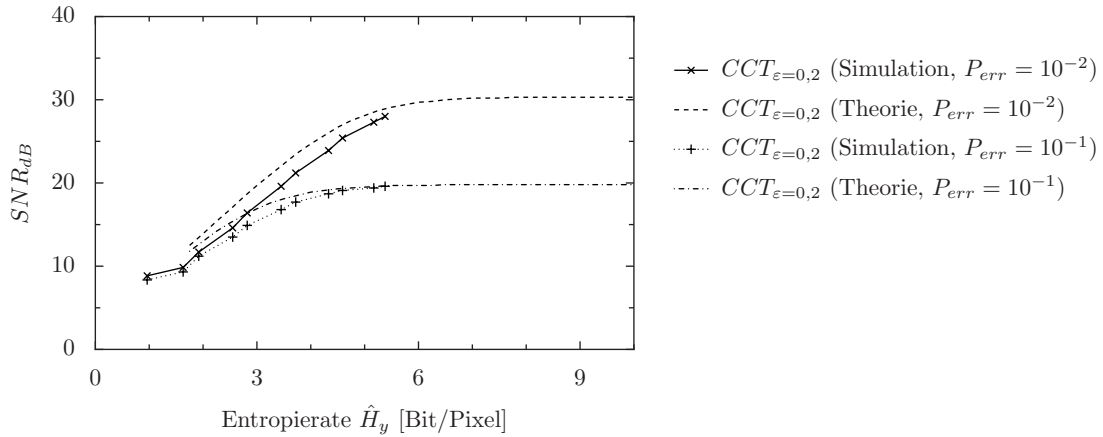


Abbildung 4.37: Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für eindimensionale AR(1)-Signale und die $CCT_{\epsilon=0,2}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 1D AR(1)-Modell).

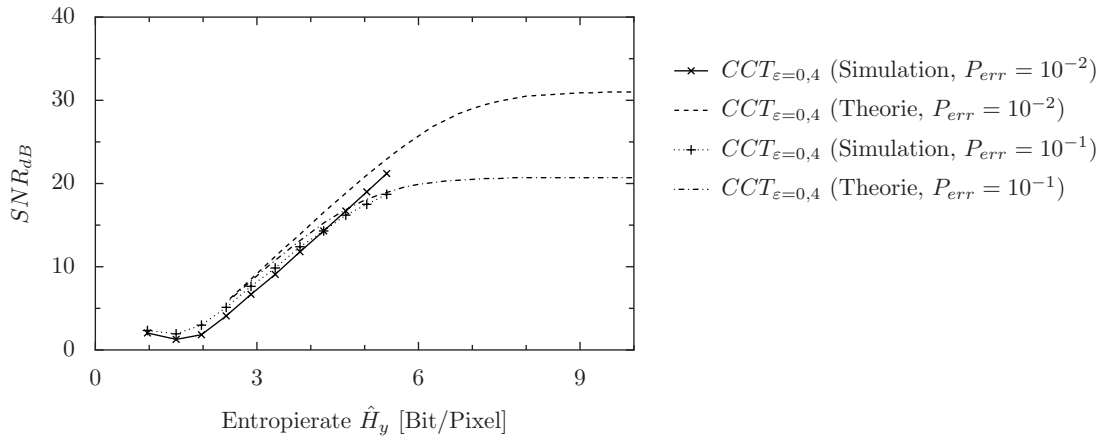


Abbildung 4.38: Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für eindimensionale AR(1)-Signale und die $CCT_{\epsilon=0,4}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 1D AR(1)-Modell).

4.5.3 Ergebnisse für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten

In diesem Abschnitt werden die für die Bildsignalverarbeitung gemäß Abschnitt 3.2.1 und den Vorbetrachtungen im Abschnitt 1.3.2 bedeutend wichtigeren Ergebnisse für separierbare zweidimensionale Transformationen und AR(1)-Quellen evaluiert.

Da sich auch für das zweidimensionale Quellenmodell ein exponentieller Zusammenhang zwischen gemessener Entropiecodiererrate und der Zielrate ergab (s. Abbildung 4.39), wird auch hier für die Bestimmung der Entropierate das Histogrammverfahren eingesetzt, womit sich wiederum ein nahezu linearer Zusammenhang zwischen Ratenzuweisung und Entropierate ergibt (s. Abbildung 4.40).

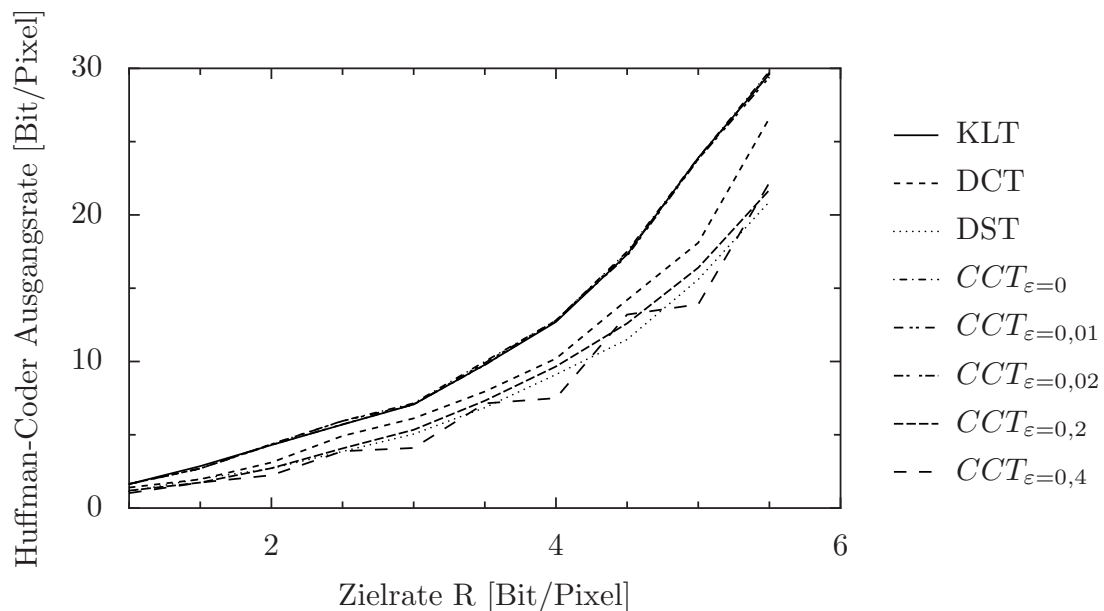


Abbildung 4.39: Entwicklung der Huffmancodierer-Ausgangsrate in Abhängigkeit von der Zielrate für alle Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 1000000 Versuche gemittelt).

4.5.3.1 Evaluierung für separierbare zweidimensionale orthonormale Transformationen

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse für die separierbaren zweidimensionalen Transformationen evaluiert, da diese in der Bildsignalverarbeitung den Standard darstellen (2D-DCT im JPEG/MPEG-Standard) und auch in den Abschnit-

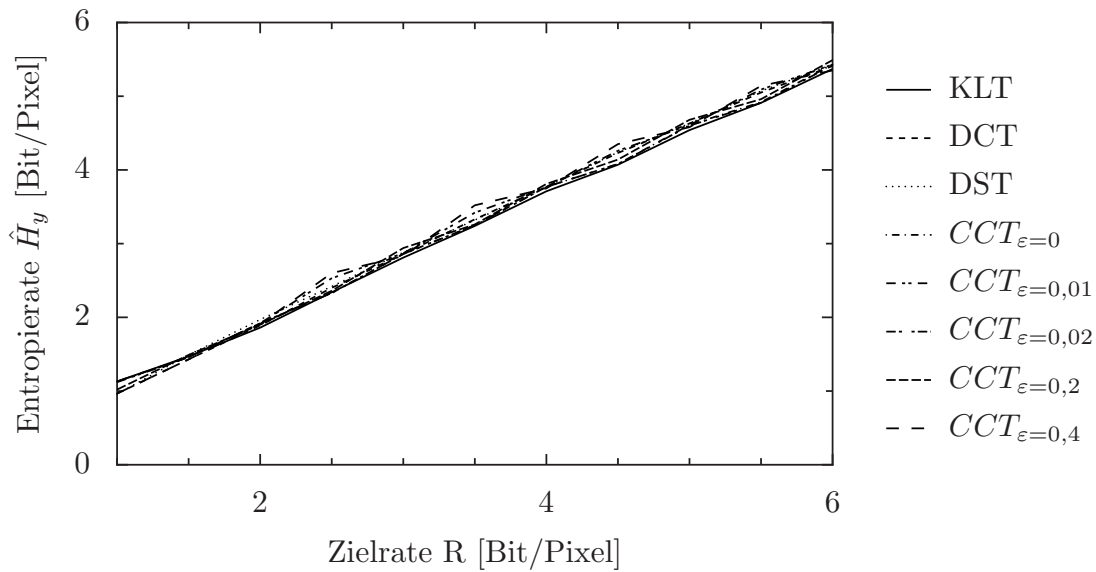


Abbildung 4.40: Entwicklung der über die Histogramm-Methode geschätzten Entropie in Abhängigkeit von der Zielrate für alle Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 1000000 Versuche gemittelt).

ten 3.2, 4.2.3 und 4.3 in den meisten Fällen die deutlich besseren Ergebnisse für zweidimensionale AR(1)-Quellensignale erzielen.

Verwendet werden separierbare zweidimensionale 4×4 (bzw. gemäß Abschnitt 2.2.3 äquivalente eindimensionale $N = 16$)-Transformationen.

Die numerischen Ergebnisse sind in den Tabellen 4.25 bis 4.28 aufgeführt, die graphische Darstellung der Ergebnisse findet sich in den Abbildungen 4.47 bis 4.52.

Bei der Betrachtung der Ergebnisse aller Transformationen (für $P_{err} = 10^{-2}$ in Abbildung 4.41 und auch für $P_{err} = 10^{-1}$ in Abbildung 4.44) fällt das ausgezeichnete Abschneiden der DST auf, welche weit über den Ergebnissen für die eindimensionalen AR(1)-Daten liegt, was auch der direkte Vergleich in Abbildung 4.55 bestätigt.

Diese Abbildungen zeigen, daß die DST in dem für praktische Anwendungen relevanten Bereich geringer Raten $R \leq 2$ Bit/Pixel die besten Ergebnisse erzielt, die stärker nichtorthonormalen CCT-Varianten ($\varepsilon \geq 0,2$) fallen bei geringen Raten durch ihre deutlich schlechteren Quellencodierungsleistungen (s. Abschnitt 4.2) stark ab und erzielen erst bei recht hohen Raten (4 Bit/Pixel für $\varepsilon = 0,2$) bessere Ergebnisse als die DST, da dann ihre besseren Kanalcodierungseigenschaften überwiegen.

R	KLT	DCT	DST	CCT_0	$CCT_{0.01}$	$CCT_{0.02}$	$CCT_{0.2}$	$CCT_{0.4}$
1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1	0.97
1.5	1.5	1.5	1.4	1.5	1.5	1.5	1.5	1.4
2	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9
2.5	2.3	2.3	2.4	2.3	2.5	2.3	2.4	2.6
3	2.8	2.8	2.8	2.9	2.9	2.9	2.9	2.8
3.5	3.2	3.2	3.4	3.2	3.4	3.2	3.3	3.5
4	3.7	3.7	3.7	3.8	3.8	3.8	3.8	3.7
4.5	4.1	4.1	4.3	4.1	4.3	4.1	4.1	4.3
5	4.5	4.5	4.5	4.6	4.6	4.6	4.7	4.6
5.5	4.9	4.9	5.1	4.9	5.1	4.9	5	5.1
6	5.4	5.4	5.4	5.4	5.4	5.4	5.5	5.4

Tabelle 4.25: Simulationsergebnisse für die erzielte Entropierate in Bit/Koeffizient, gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\varrho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-2}$). Quellenmodell: sep. 2D-AR(1). Orthonormale Transformationen sind separierbar zweidimensional. Die Entropie wird über das Histogrammverfahren ermittelt.

Bei der Evaluierung der in ihren Ergebnissen eng beieinanderliegenden Gruppe von Transformationen in den Abbildungen 4.42 für $P_{err} = 10^{-2}$ und für $P_{err} = 10^{-1}$ in Abbildung 4.44 zeigt sich, daß die orthonormale $CCT_{\varepsilon=0}$ leicht bessere Ergebnisse erzielt als der Quasistandard DCT, und diese Ergebnisse für leichte Erhöhungen von ε gerade bei dem mit $P_{err} = 10^{-1}$ stärker gestörten Szenario signifikant besser werden.

Das bezweckte Konzept, der frei variierbare Kompromiß zwischen Quellen- und Kanalcodierung, funktioniert also. Allerdings zeigen die Ergebnisse der DST, daß auf der alleinigen Basis von orthonormalen Transformationen bessere Ergebnisse zu erzielen sind. Ein ebenfalls hinsichtlich der Quellen- und Kanalcodierung variierbarer Ansatz ist im Ausblick im Abschnitt 5.2 beschrieben, ansonsten ergibt sich aus den Ergebnissen dieser Evaluierung als optimaler Ansatz der einer DST in Verbund mit der Schätzlösung nach Gleichung 2.106, wobei der Fehlerschutz durch die Erhöhung der zugewiesenen Bitrate verstärkt werden kann. Durch die Erhöhung der Bitrate treten die schlechteren Quellencodierungseigenschaften der DST hinsichtlich der Gesamtbilanz hinter die nun besseren Kanalcodierungseigenschaften zurück.

R	KLT	DCT	DST	CCT_0	$CCT_{0.01}$	$CCT_{0.02}$	$CCT_{0.2}$	$CCT_{0.4}$
1	17	17	16	17	17	17	10	1.8
1.5	18	18	18	18	18	18	14	4.9
2	19	19	22	19	19	19	15	3.5
2.5	19	19	23	19	20	20	17	7.7
3	20	20	26	20	20	20	20	7.5
3.5	20	20	29	20	20	20	22	11
4	20	20	29	20	20	21	24	13
4.5	20	20	31	20	20	21	26	16
5	20	20	31	20	20	21	29	17
5.5	20	20	32	20	20	21	30	21
6	20	20	32	20	20	21	32	22

Tabelle 4.26: Simulationsergebnisse für den erzielten SNR_{dB} , gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\varrho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-2}$). Quellenmodell: sep. 2D-AR(1). Orthonormale Transformationen sind separierbar zweidimensional.

R	KLT	DCT	DST	CCT_0	$CCT_{0.01}$	$CCT_{0.02}$	$CCT_{0.2}$	$CCT_{0.4}$
1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1	0.97
1.5	1.5	1.5	1.4	1.5	1.5	1.5	1.5	1.4
2	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9
2.5	2.3	2.3	2.4	2.3	2.5	2.3	2.4	2.6
3	2.8	2.8	2.8	2.9	2.9	2.9	2.9	2.8
3.5	3.2	3.2	3.4	3.2	3.4	3.2	3.3	3.5
4	3.7	3.7	3.7	3.8	3.8	3.8	3.8	3.7
4.5	4.1	4.1	4.3	4.1	4.3	4.1	4.1	4.3
5	4.5	4.5	4.5	4.6	4.6	4.6	4.7	4.6
5.5	4.9	4.9	5.1	4.9	5.1	4.9	5	5.1
6	5.4	5.4	5.4	5.4	5.4	5.4	5.5	5.4

Tabelle 4.27: Simulationsergebnisse für die erzielte Entropierate in Bit/Koeffizient, gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\varrho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-1}$). Quellenmodell: sep. 2D-AR(1). Orthonormale Transformationen sind separierbar zweidimensional. Die Entropie wird über das Histogrammverfahren ermittelt.

R	KLT	DCT	DST	CCT_0	$CCT_{0.01}$	$CCT_{0.02}$	$CCT_{0.2}$	$CCT_{0.4}$
1	9.6	9.7	13	9.7	9.8	10	9.2	1.9
1.5	9.8	9.9	14	9.9	10	10	11	3.7
2	9.9	10	17	10	10	11	12	3.3
2.5	10	10	17	10	10	11	14	6.4
3	10	10	19	10	10	11	17	7.3
3.5	10	10	20	10	10	11	17	10
4	10	10	20	10	10	11	20	12
4.5	10	10	20	10	10	11	21	15
5	10	10	20	10	10	11	22	17
5.5	10	10	20	10	10	11	22	19
6	10	10	21	10	10	11	23	21

Tabelle 4.28: Simulationsergebnisse für den erzielten SNR_{dB} , gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\rho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-1}$). Quellenmodell: sep. 2D-AR(1). Orthonormale Transformationen sind separierbar zweidimensional.

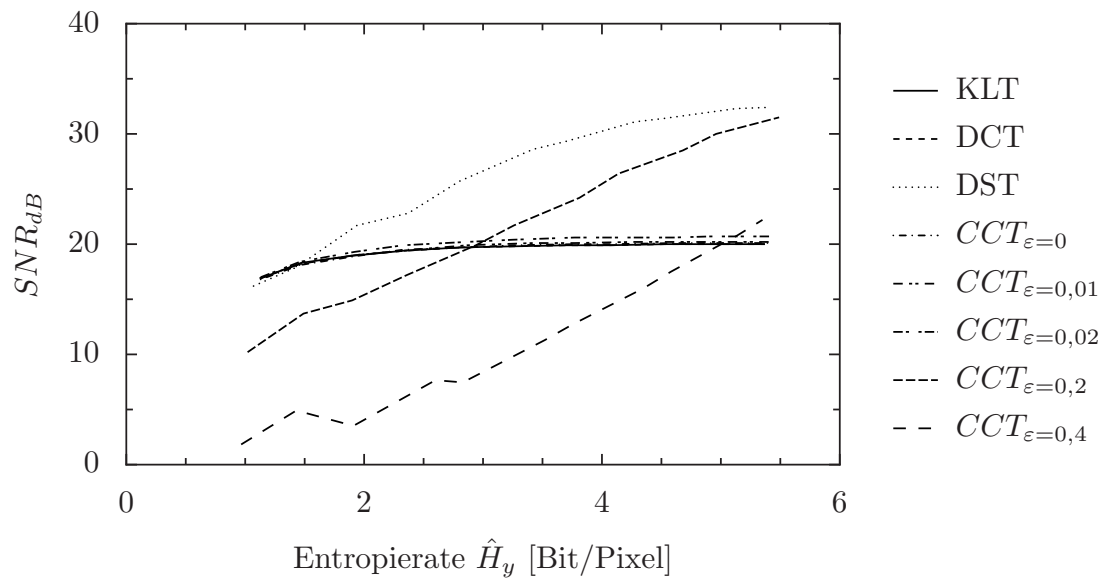


Abbildung 4.41: Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Zielrate für alle Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und separierbare zweidimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

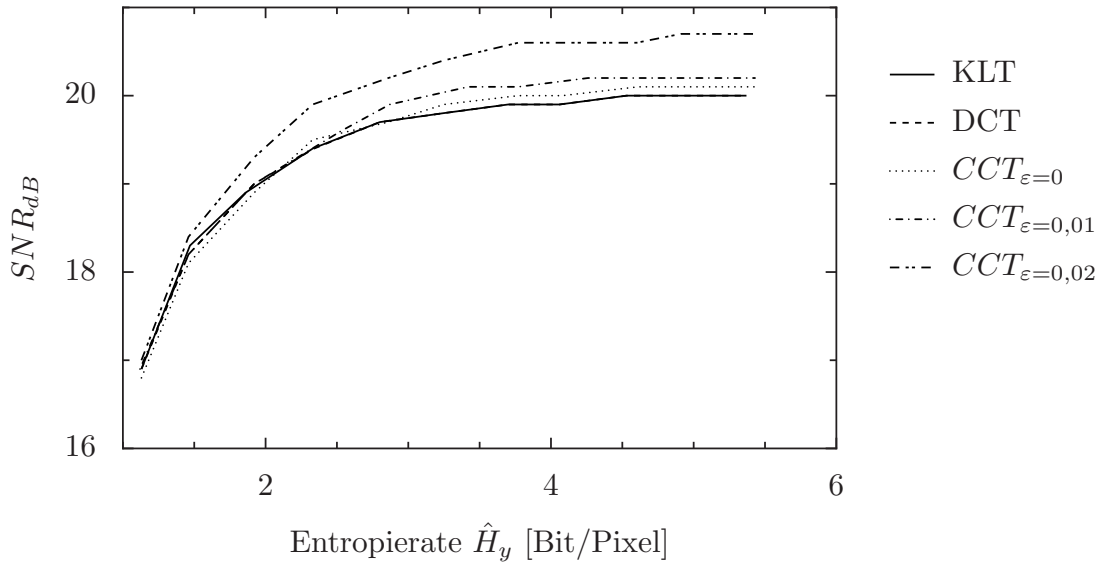


Abbildung 4.42: Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Zielrate für die enge Gruppe von Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und separierbare zweidimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

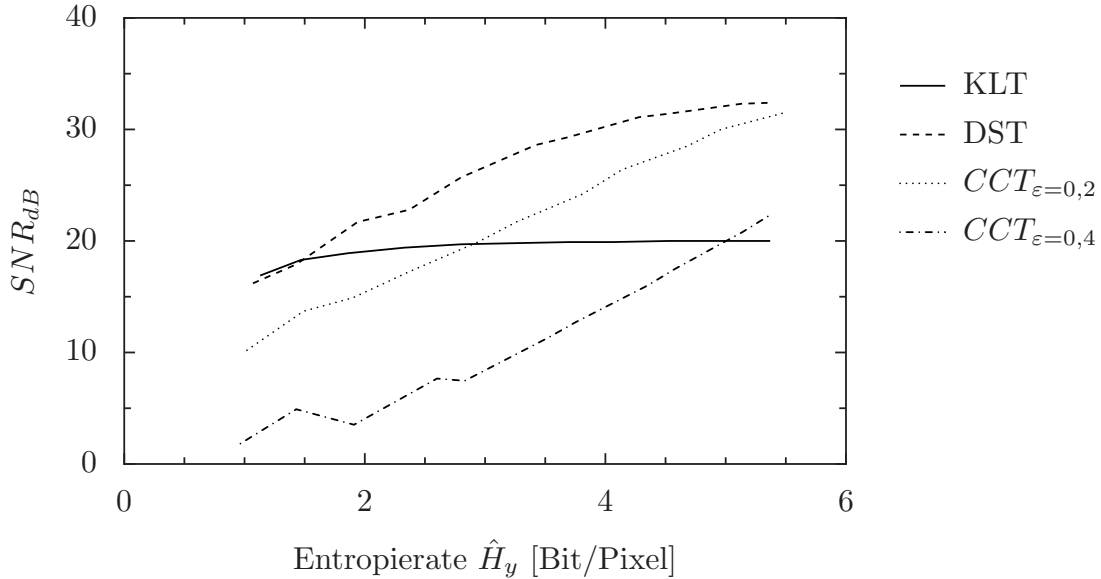


Abbildung 4.43: Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Zielrate für die abweichende Gruppe von Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und separierbare zweidimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

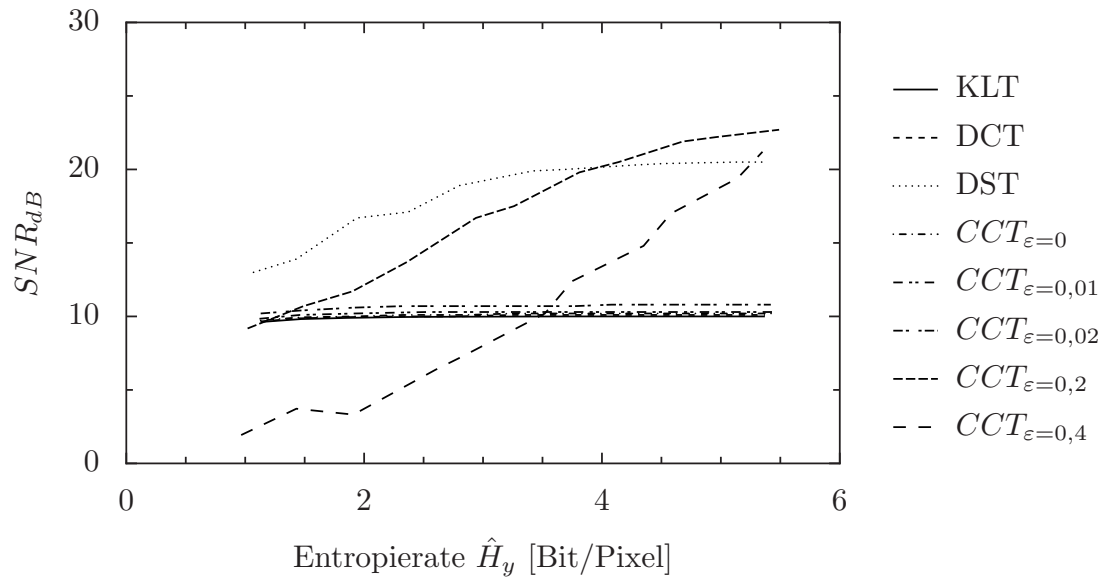


Abbildung 4.44: Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Zielrate für alle Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und separierbare zweidimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

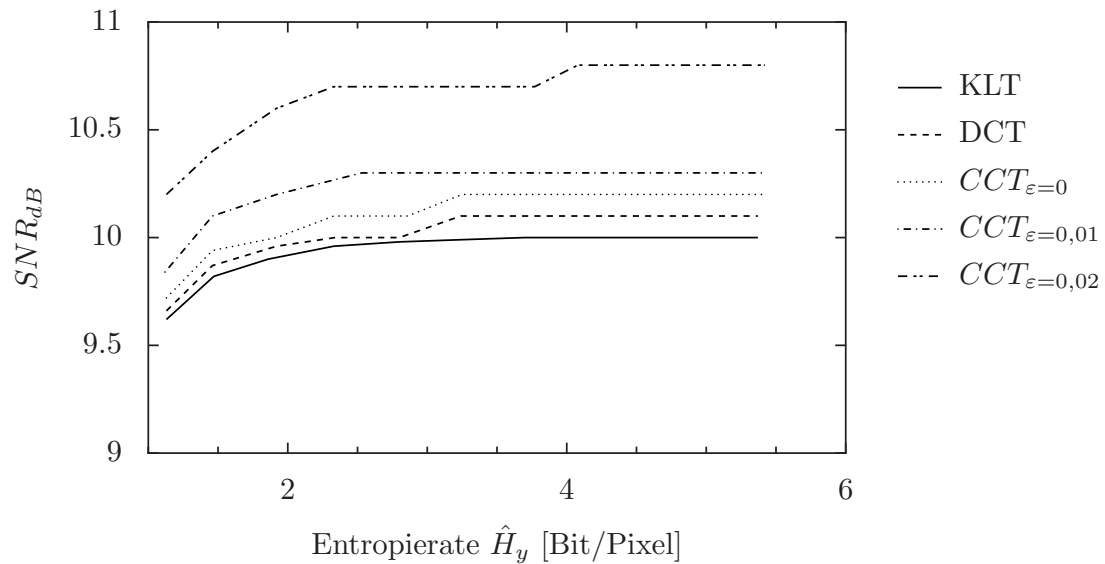


Abbildung 4.45: Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Zielrate für die enge Gruppe von Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und separierbare zweidimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

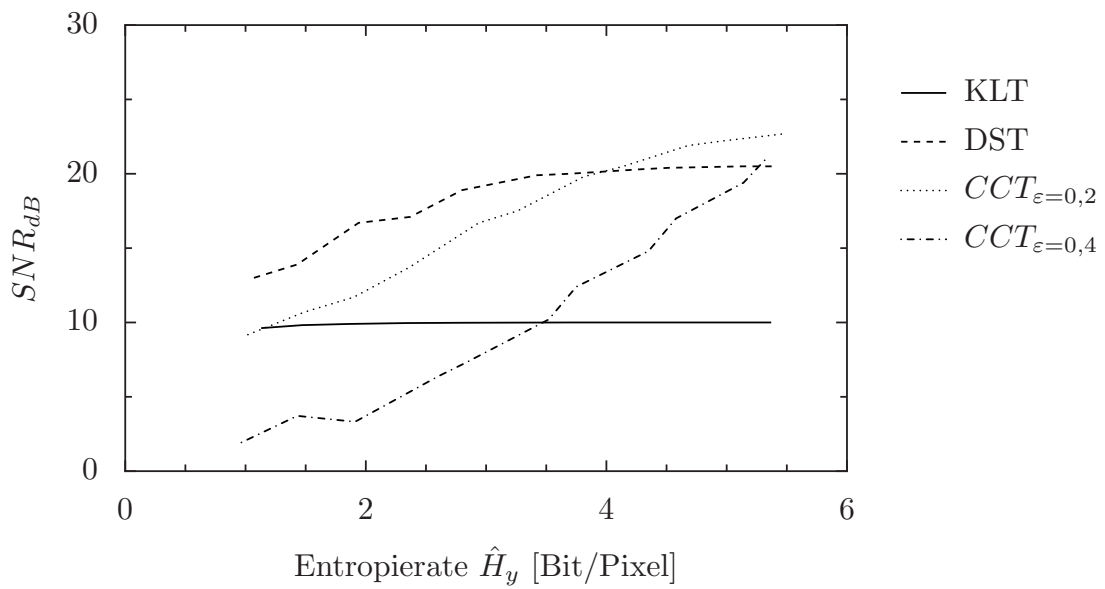


Abbildung 4.46: Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Zielrate für die abweichende Gruppe von Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und separierbare zweidimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

4.5.3.2 Evaluierung für eindimensionale orthonormale Transformationen

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse für eindimensionale orthonormale Transformationen und separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellensignale evaluiert, da deren Ergebnisse, vor allem die der DST und der KLT, in den vorhergehenden Abschnitten teilweise überraschend waren.

Die numerischen Ergebnisse sind in den Tabellen 4.29 bis 4.32 aufgeführt, die graphische Darstellung der Ergebnisse findet sich in den Abbildungen 4.47 bis 4.52.

R	KLT	DCT	DST	CCT_0	$CCT_{0.01}$	$CCT_{0.02}$	$CCT_{0.2}$	$CCT_{0.4}$
1	1.1	0.96	0.96	1.1	1.1	1.1	1	0.97
1.5	1.5	1.4	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.4
2	1.9	1.9	2	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9
2.5	2.3	2.4	2.4	2.3	2.5	2.3	2.4	2.6
3	2.8	2.9	2.9	2.9	2.9	2.9	2.9	2.8
3.5	3.2	3.3	3.3	3.2	3.4	3.2	3.3	3.5
4	3.7	3.8	3.8	3.8	3.8	3.8	3.8	3.7
4.5	4.1	4.2	4.2	4.1	4.3	4.1	4.1	4.3
5	4.5	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6	4.7	4.6
5.5	4.9	5	5.1	4.9	5.1	4.9	5	5.1
6	5.4	5.4	5.4	5.4	5.4	5.4	5.5	5.4

Tabelle 4.29: Simulationsergebnisse für die erzielte Entropierate in Bit/Koeffizient, gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\varrho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-2}$). Orthonormale Transformationen sind eindimensional. Die Entropie wird über das Histogrammverfahren ermittelt.

Bei der Betrachtung der Ergebnisse aller Transformationen für $P_{err} = 10^{-2}$ in Abbildung 4.47 fällt das ausgezeichnete Abschneiden der DST auf, welche weit über den Ergebnissen für die eindimensionalen AR(1)-Daten liegt, was auch der direkte Vergleich in Abbildung 4.55 bestätigt.

Ebenso auffallend sind die Resultate für die DCT, welche bei höheren Raten mit der CCT aufschließt. Bei einer höheren Paketausfallrate von $P_{err} = 10^{-1}$ erreicht die DCT bei Zielraten $R > 4,5$ Bit/Pixel sogar bessere Ergebnisse als die $CCT_{\varepsilon=0,01}$, wie Abbildung 4.51 zeigt.

R	KLT	DCT	DST	CCT_0	$CCT_{0.01}$	$CCT_{0.02}$	$CCT_{0.2}$	$CCT_{0.4}$
1	17	15	13	17	17	17	10	1.8
1.5	18	17	16	18	18	18	14	4.9
2	19	18	18	19	19	19	15	3.5
2.5	19	19	21	19	20	20	17	7.7
3	20	19	23	20	20	20	20	7.5
3.5	20	20	26	20	20	20	22	11
4	20	20	28	20	20	21	24	13
4.5	20	20	30	20	20	21	26	16
5	20	20	31	20	20	21	29	17
5.5	20	20	33	20	20	21	30	21
6	20	20	33	20	20	21	32	22

Tabelle 4.30: Simulationsergebnisse für den erzielten SNR_{dB} , gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\varrho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-2}$). Quellenmodell: sep. 2D-AR(1). Orthonormale Transformationen sind eindimensional.

R	KLT	DCT	DST	CCT_0	$CCT_{0.01}$	$CCT_{0.02}$	$CCT_{0.2}$	$CCT_{0.4}$
1	1.1	0.96	0.96	1.1	1.1	1.1	1	0.97
1.5	1.5	1.4	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.4
2	1.9	1.9	2	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9
2.5	2.3	2.4	2.4	2.3	2.5	2.3	2.4	2.6
3	2.8	2.9	2.9	2.9	2.9	2.9	2.9	2.8
3.5	3.2	3.3	3.3	3.2	3.4	3.2	3.3	3.5
4	3.7	3.8	3.8	3.8	3.8	3.8	3.8	3.7
4.5	4.1	4.2	4.2	4.1	4.3	4.1	4.1	4.3
5	4.5	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6	4.7	4.6
5.5	4.9	5	5.1	4.9	5.1	4.9	5	5.1
6	5.4	5.4	5.4	5.4	5.4	5.4	5.5	5.4

Tabelle 4.31: Simulationsergebnisse für die erzielte Entropierate in Bit/Koeffizient, gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\varrho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-1}$). Orthonormale Transformationen sind eindimensional. Die Entropie wird über das Histogrammverfahren ermittelt.

R	KLT	DCT	DST	CCT_0	$CCT_{0.01}$	$CCT_{0.02}$	$CCT_{0.2}$	$CCT_{0.4}$
1	9.6	9.2	12	9.7	9.8	10	9.2	1.9
1.5	9.8	9.8	14	9.9	10	10	11	3.7
2	9.9	10	16	10	10	11	12	3.3
2.5	10	10	18	10	10	11	14	6.4
3	10	10	20	10	10	11	17	7.3
3.5	10	10	22	10	10	11	17	10
4	10	10	23	10	10	11	20	12
4.5	10	10	24	10	10	11	21	15
5	10	10	24	10	10	11	22	17
5.5	10	10	24	10	10	11	22	19
6	10	10	24	10	10	11	23	21

Tabelle 4.32: Simulationsergebnisse für den erzielten SNR_{dB} , gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\rho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-1}$). Quellenmodell: sep. 2D-AR(1). Orthonormale Transformationen sind eindimensional.

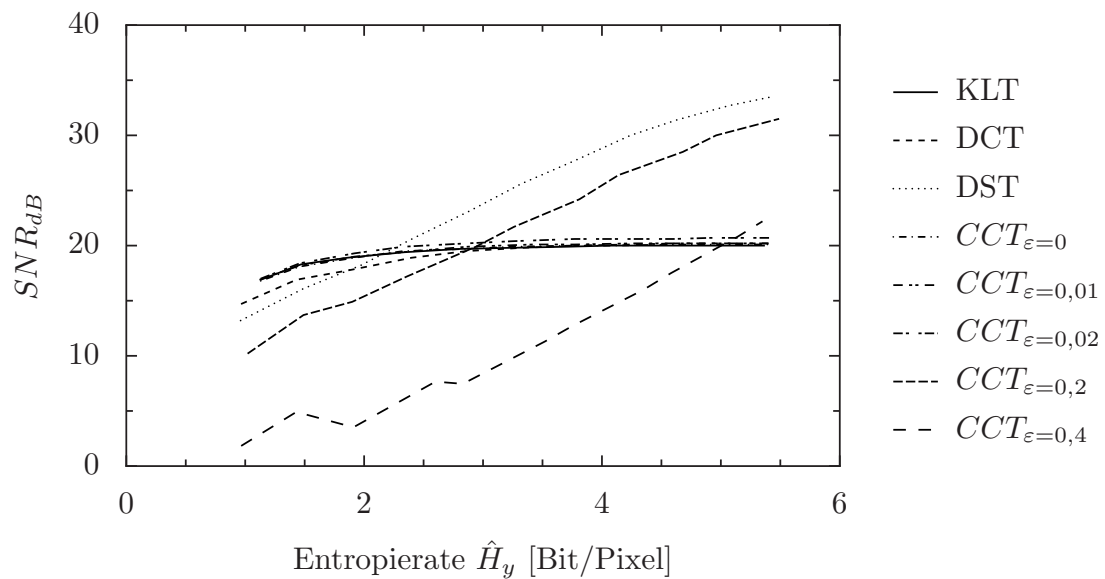


Abbildung 4.47: Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Zielrate für alle Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und eindimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

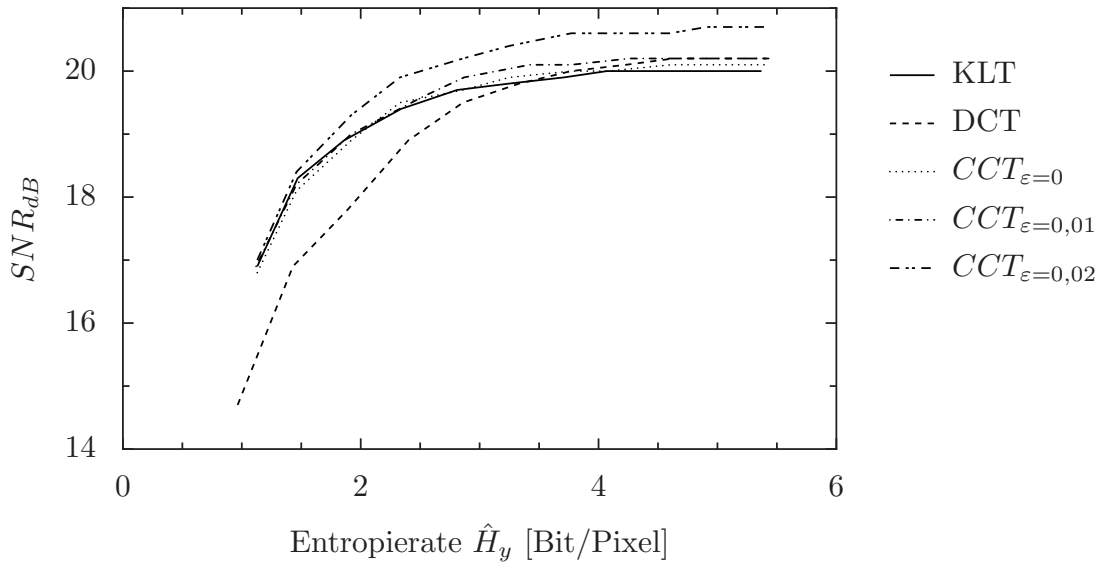


Abbildung 4.48: Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Zielrate für die enge Gruppe von Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und eindimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

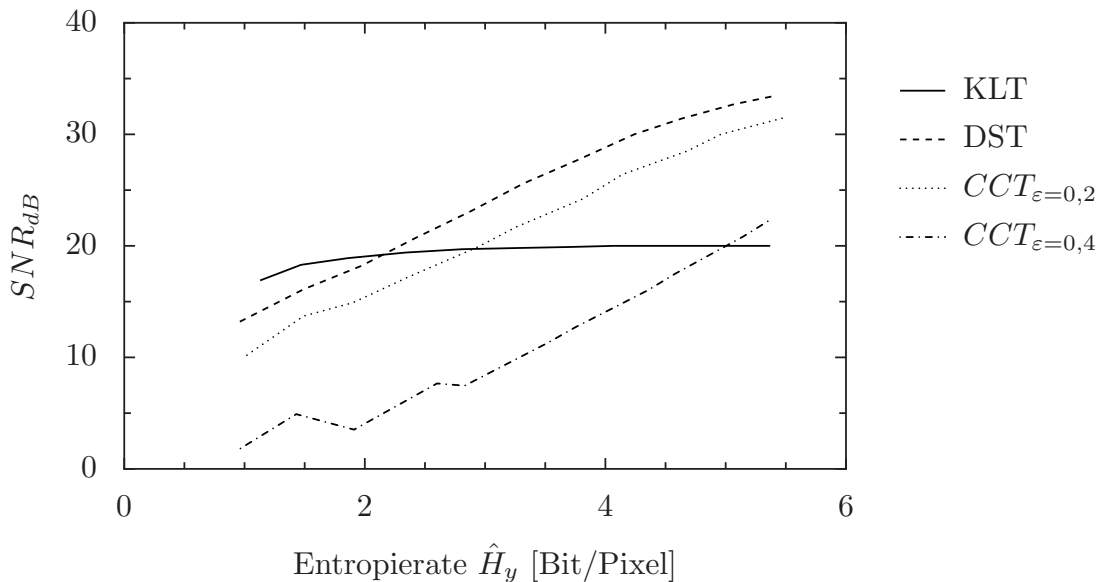


Abbildung 4.49: Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Zielrate für die abweichende Gruppe von Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und eindimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

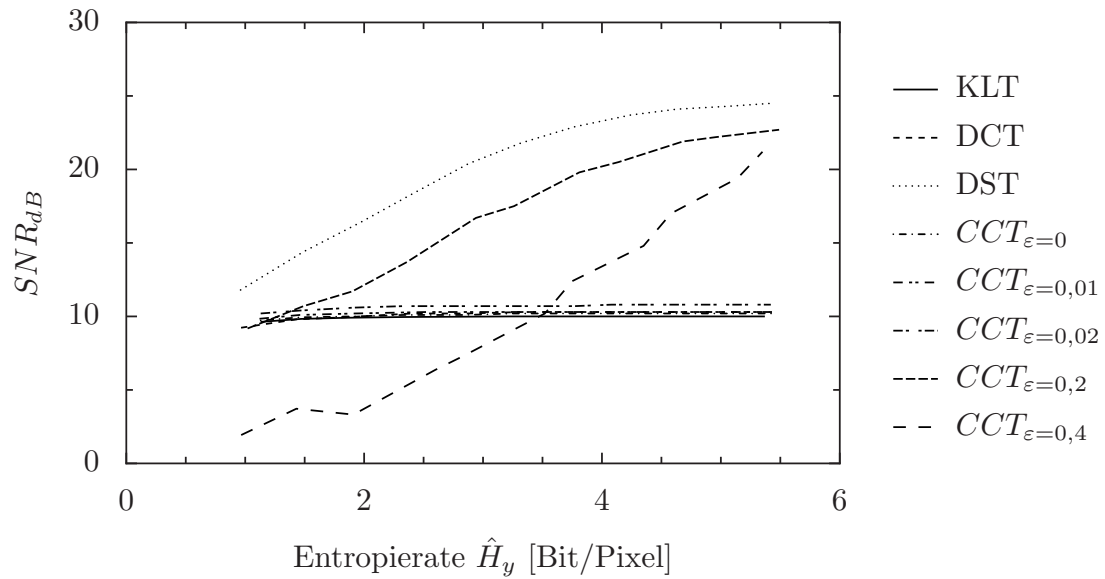


Abbildung 4.50: Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Zielrate für alle Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und eindimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

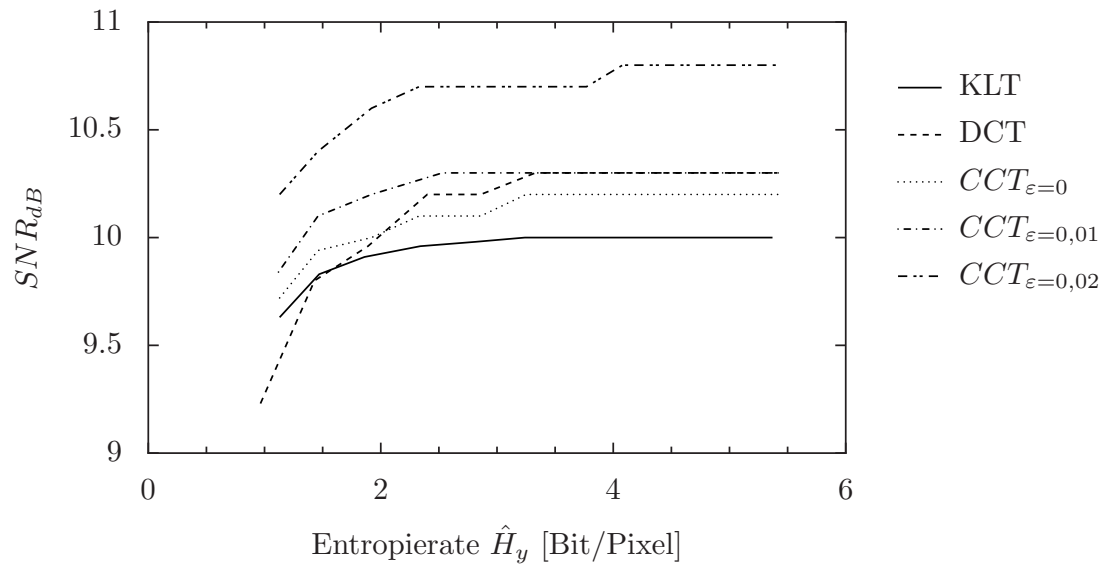


Abbildung 4.51: Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Zielrate für die enge Gruppe von Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und eindimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

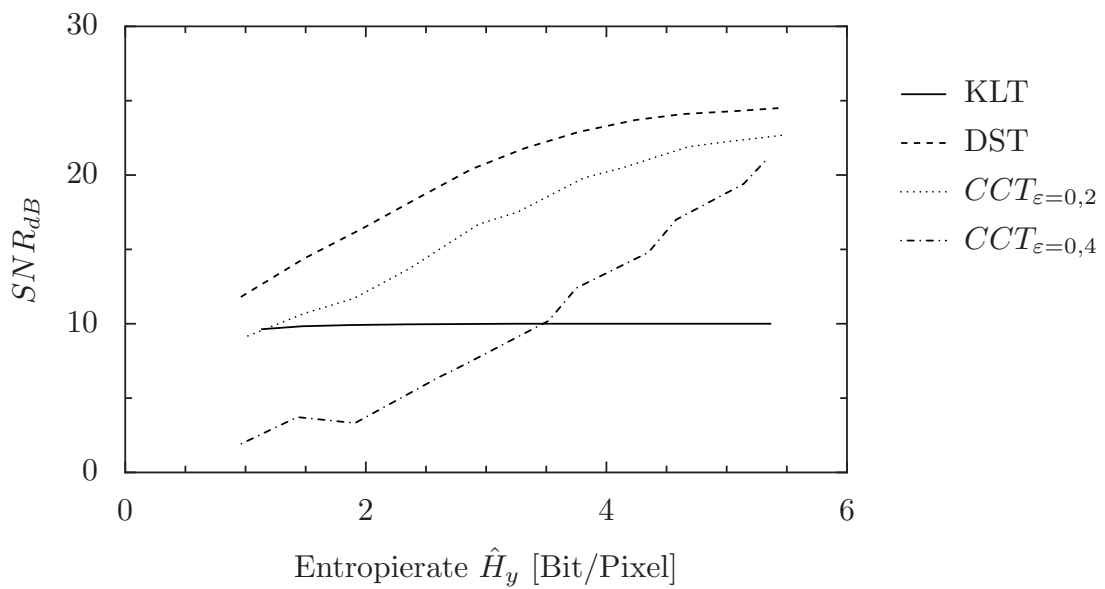


Abbildung 4.52: Entwicklung des SNR_{dB} in Abhängigkeit von der Zielrate für die abweichende Gruppe von Transformationen und für zweidimensionale separierbare AR(1)-Daten und eindimensionale orthonormale Transformationen ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

4.5.3.3 Vergleich zwischen den Ergebnissen für das eindimensionale und das zweidimensionale Szenario

Der direkte Vergleich zwischen den Ergebnissen für das eindimensionale und das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell unter ansonsten gleichen Bedingungen in den Abbildungen 4.53 bis 4.60 zeigt, daß die größten Unterschiede bei den kleinen Raten auftreten, für größere Raten konvergieren die Ergebnisse bei der KLT und der DCT, während bei den nur schwach nichtorthonormalen CCT-Transformationen für das eindimensionale Quellenmodell sogar bessere Ergebnisse erzielt werden (s. Abbildungen 4.56 bis 4.58).

Für die stärker nichtorthonormalen CCT-Varianten werden auch bei höheren Raten mit dem separierbaren zweidimensionalen AR(1)-Quellenmodell die besseren Ergebnisse erzielt (s. Abbildungen 4.59 bis 4.60).

Wie im vorherigen Abschnitt schon angesprochen überrascht das gute Abschneiden der DST für separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellendaten gerade im Vergleich zu den Ergebnissen für eindimensionale AR(1)-Daten, wie Abbildung 4.55 zeigt.

Für separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellensignale ergeben sich hinsichtlich der KLT sowohl für die eindimensionale als auch für die separierbare zweidimensionale Transformation identische Ergebnisse. Dies ist bei einer gemäß Abschnitt 1.3.3 ebenfalls kronecker-faktorisierten Quellenkorrelationsmatrix zu erwarten.

Bei der DCT und der DST fällt auf, daß für separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellensignale die separierbaren zweidimensionalen Transformationen bei höheren Raten von den eindimensionalen Transformationen überflügelt werden. Dies resultiert aus der schlechteren Quellencodierung durch die eindimensionalen Transformationen, welche mehr Korrelationen als Schätzgrundlage in den Transformationskoeffizienten beläßt. Bei höheren Raten tritt dann hinsichtlich der Gesamtbilanz die schlechtere Quantisierungsverzerrung durch die schlechtere Quellencodierungsleistung hinter die nun geringeren Kanalverzerrungen durch die besseren Korrekturmöglichkeiten zurück.

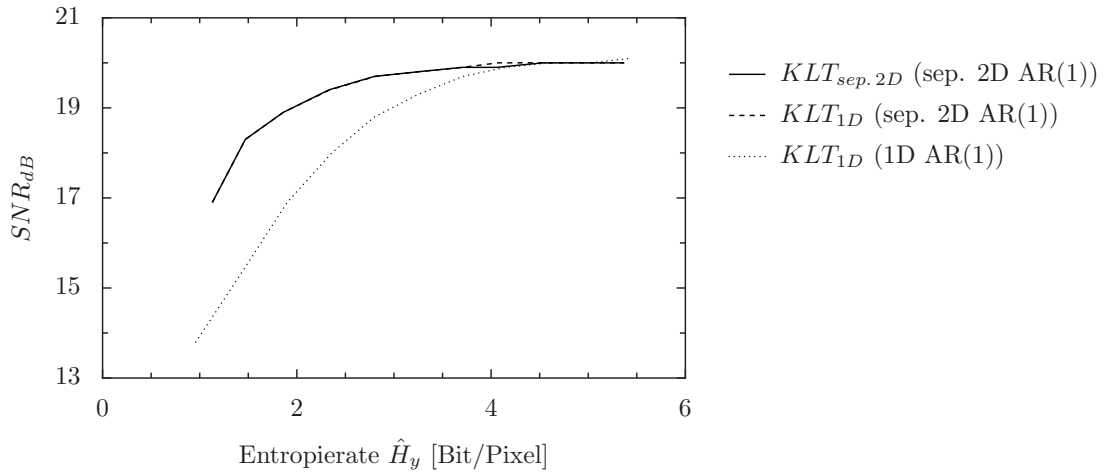


Abbildung 4.53: Vergleich zwischen den Ergebnissen für das eindimensionale und das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell für die KLT ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

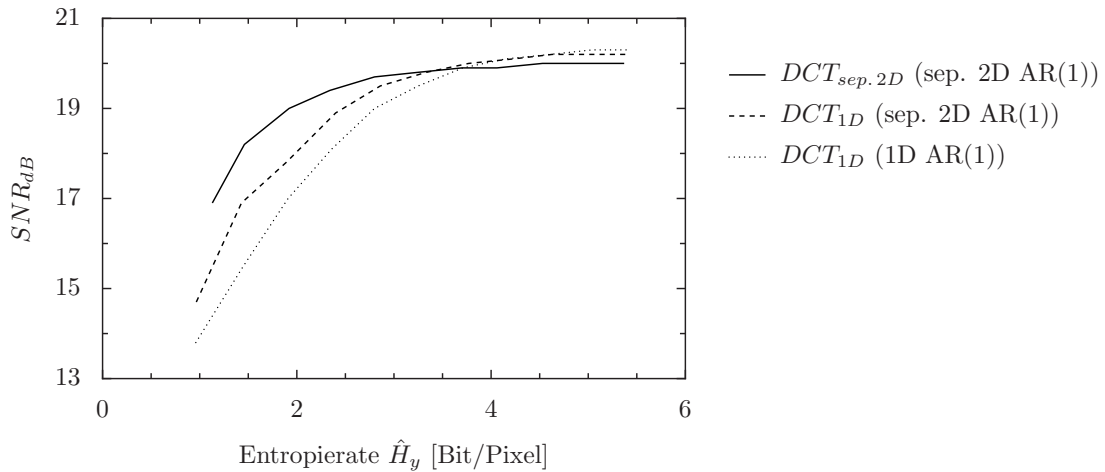


Abbildung 4.54: Vergleich zwischen den Ergebnissen für das eindimensionale und das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell für die DCT ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

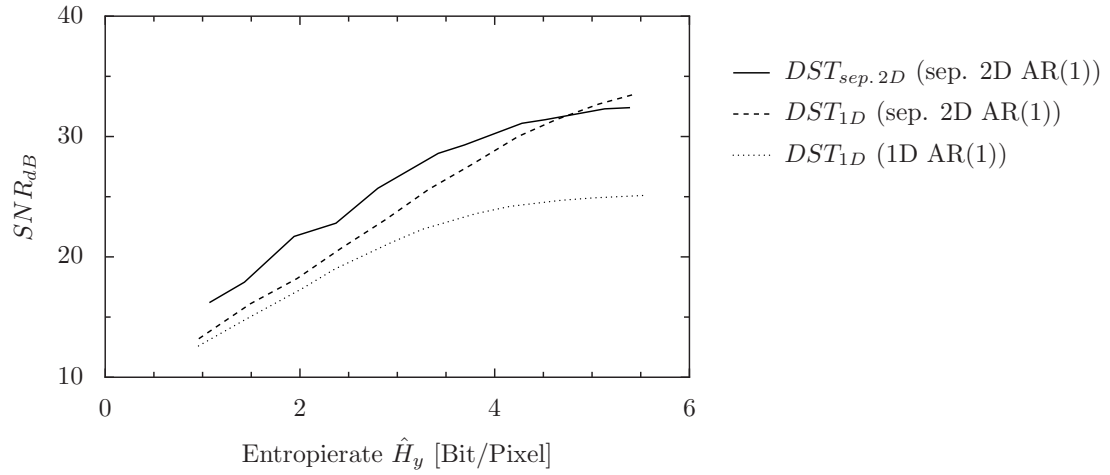


Abbildung 4.55: Vergleich zwischen den Ergebnissen für das eindimensionale und das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell für die DST ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

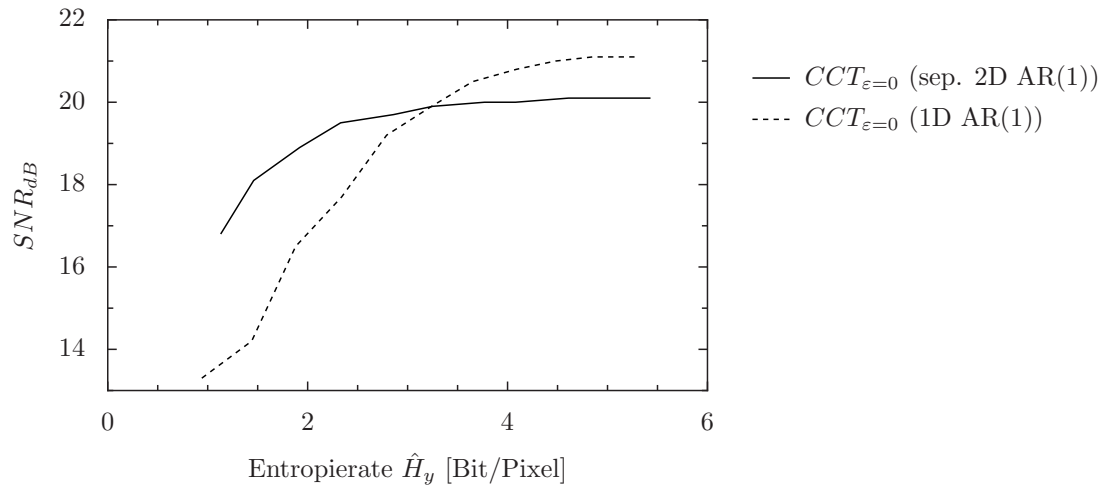


Abbildung 4.56: Vergleich zwischen den Ergebnissen für das eindimensionale und das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell für die $CCT_{\varepsilon=0}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

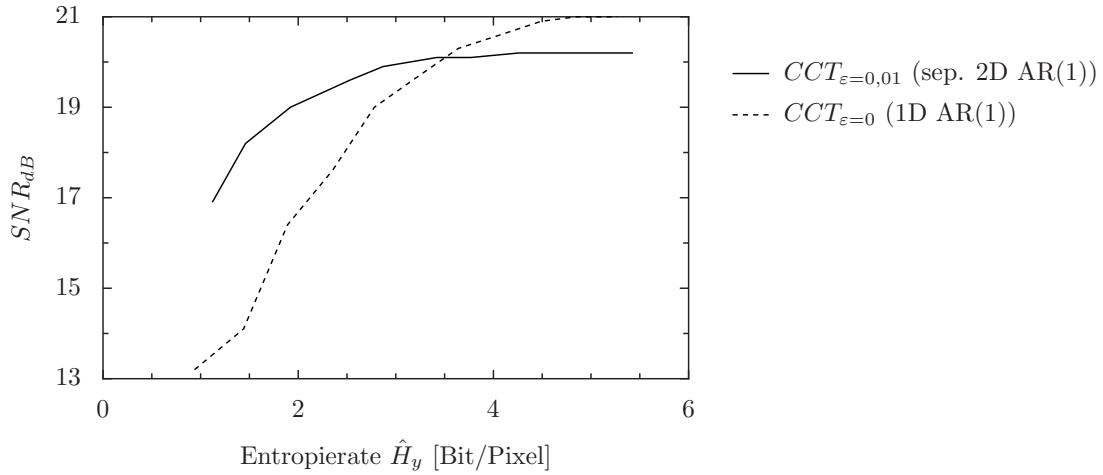


Abbildung 4.57: Vergleich zwischen den Ergebnissen für das eindimensionale und das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell für die $CCT_{\epsilon=0,01}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

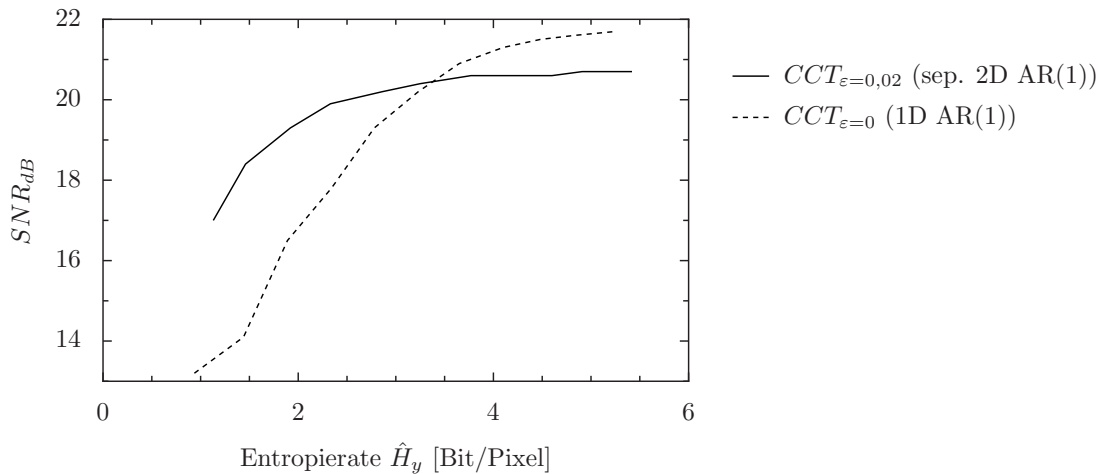


Abbildung 4.58: Vergleich zwischen den Ergebnissen für das eindimensionale und das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell für die $CCT_{\epsilon=0,02}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

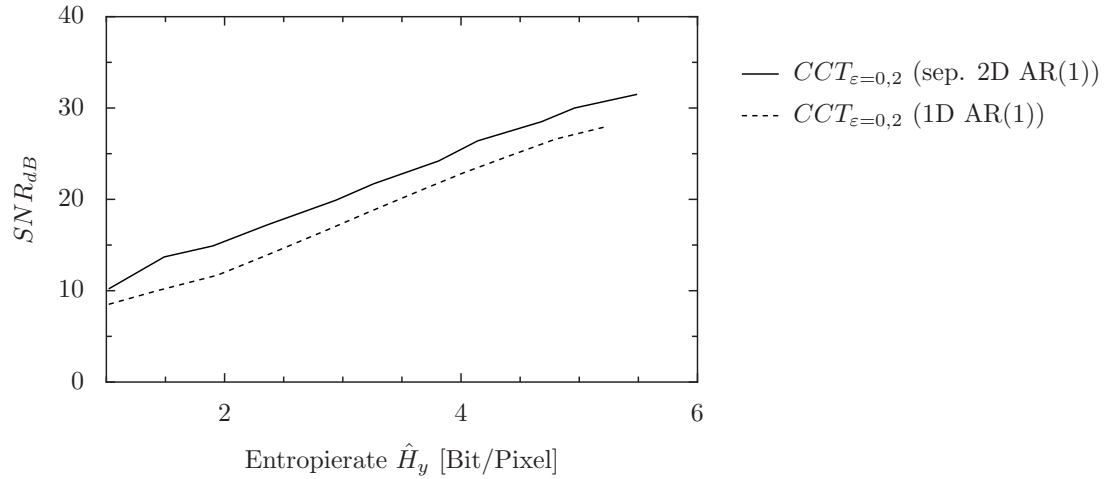


Abbildung 4.59: Vergleich zwischen den Ergebnissen für das eindimensionale und das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell für die $CCT_{\epsilon=0,2}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

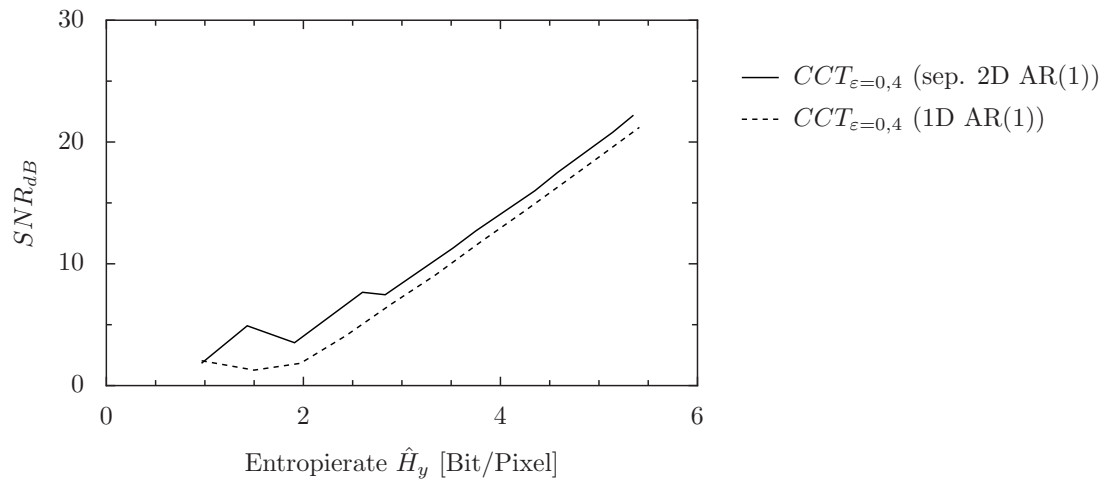


Abbildung 4.60: Vergleich zwischen den Ergebnissen für das eindimensionale und das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell für die $CCT_{\epsilon=0,4}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

4.5.4 Ergebnisse für die Begrenzung der Schätzung auf die ersten N_{Limit} Transformationskoeffizienten

Die vollständige Umsetzung der Schätzlösung nach Gleichung 2.106 kann sehr rechenintensiv sein, da bei der Berechnung der optimalen inversen Transformationsmatrix für die im JPEG/MPEG-Standard verwendete 8×8 zweidimensionale separierbare Transformation (DCT) die Invertierung einer quadratischen $N = 64 - N_{err}$ -Matrix durchgeführt werden muß.

Alle untersuchten Transformationen einschließlich der CCT für $\varepsilon \ll 1$ weisen eine hohe Energiepackungseffizienz auf.

So sind für separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellensignale mit $\varrho = 0,96$ gemäß

$$\eta = \frac{\sum_{k=1}^{N_{Limit}} (\mathbf{T}_{DCT} \cdot \mathbf{R}_{xx} \cdot \mathbf{T}_{DCT}^H)_{(k,k)}}{\sum_{k=1}^N \mathbf{R}_{xx}(k, k)} \quad (4.179)$$

in den ersten beiden Transformationskoeffizienten einer separierbaren zweidimensionalen 4×4 -DCT $\approx 93,56\%$ der Signalenergie enthalten, wenn für \mathbf{R}_{xx} und \mathbf{T}_{DCT} die Überlegungen aus dem Abschnitt 2.2.3 angewandt werden.

Somit liegt die Überlegung nahe, die Korrektur nur auf die Ausfälle der ersten N_{Limit} Transformationskoeffizienten zu beschränken, um die kostenträchtigsten Fehler zu behandeln. Auf diese Weise müßten nur $2^{N_{Limit}}$ optimale Rekonstruktionsmatrizen nach Gleichung 2.106 vorgehalten werden, was bei $N_{Limit} = 2$ 4 vorberechnete bzw. bei $N_{Limit} = 4$ 16 vorberechnete Rekonstruktionsmatrizen bedeuten würde. Diese Anzahlen sind deutlich geringer als die für eine separierbare zweidimensionale 4×4 -Transformation möglichen $2^{16} = 65536$ Rekonstruktionsmatrizen.

Die Ergebnisse für die Evaluierung für $N_{Limit} = 4$ in den Tabellen 4.33 und 4.34 sowie für $N_{Limit} = 2$ in den Tabellen 4.35 und 4.36 enthalten. Zum Vergleich mit den Ergebnissen einer vollwertigen Fehlerkorrektur über alle $N = 16$ Transformationskoeffizienten kann Tabelle 4.28 verwendet werden.

Die graphische Auswertung erfolgt für jede Transformation getrennt in den Abbildungen 4.61 bis 4.67.

Die Simulationsergebnisse zeigen, daß sich für die DST und die CCT hinsichtlich des deutlich reduzierten Aufwands durchaus akzeptable Ergebnisse zwischen der vollwertigen Schätzung und den Ergebnissen komplett ohne Schätzer, d.h. nur mit der inversen Transformation ergeben. Für die leicht nichtorthonormalen CCT-Varianten ($\varepsilon = 0,01$ bzw. $\varepsilon = 0,02$) sind die erzielten Resultate denen der vollwertigen Schätzung sehr nahe.

R	KLT	DCT	DST	CCT_0	$CCT_{0.01}$	$CCT_{0.02}$	$CCT_{0.2}$	$CCT_{0.4}$
1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1	0.97
1.5	1.5	1.5	1.4	1.5	1.5	1.5	1.5	1.4
2	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9
2.5	2.3	2.3	2.4	2.3	2.5	2.3	2.4	2.6
3	2.8	2.8	2.8	2.9	2.9	2.9	2.9	2.8
3.5	3.2	3.2	3.4	3.2	3.4	3.2	3.3	3.5
4	3.7	3.7	3.7	3.8	3.8	3.8	3.8	3.7
4.5	4.1	4.1	4.3	4.1	4.3	4.1	4.1	4.3
5	4.5	4.5	4.5	4.6	4.6	4.6	4.7	4.6
5.5	4.9	4.9	5.1	4.9	5.1	4.9	5	5.1
6	5.4	5.4	5.4	5.4	5.4	5.4	5.5	5.4

Tabelle 4.33: Simulationsergebnisse für die erzielte Entropierate in Bit/Koeffizient, gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\varrho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-1}$). Quellenmodell: sep. 2D-AR(1). Orthonormale Transformationen sind separierbar zweidimensional. Die Entropie wird über das Histogrammverfahren ermittelt.

Für den praktischen Einsatz kann es zudem durchaus sinnvoll sein, nur Einzelausfälle anzunehmen. Somit müßten nur N_{Limit} vorberechnete optimale Rekonstruktionsmatrizen nach Gleichung 2.106 vorgehalten werden.

Die Beschränkung auf Einzelbitfehler ist durchaus praktikabel, da bei einer Koeffizientenausfallwahrscheinlichkeit von $P_{err} = 10^{-3}$ und unabhängigen Ausfall der $N = 16$ Transformationskoeffizienten die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall von mehr als einem Transformationskoeffizienten als Gegenwahrscheinlichkeit zum Ausfall keines oder genau eines Ausfalls gemäß

$$P = 1 - \left[(1 - P_{err})^N + \binom{N}{1} \cdot P_{err} \cdot (1 - P_{err})^{N-1} \right] \quad (4.180)$$

gleich $1,19 \cdot 10^{-4}$ beträgt.

R	KLT	DCT	DST	CCT_0	$CCT_{0.01}$	$CCT_{0.02}$	$CCT_{0.2}$	$CCT_{0.4}$
1	9.6	9.7	12	9.7	9.8	10	6.5	-2.6
1.5	9.8	9.9	13	9.9	10	10	8.4	-1.6
2	9.9	10	14	10	10	10	9	-0.42
2.5	10	10	15	10	10	11	10	0.88
3	10	10	15	10	10	11	11	1.2
3.5	10	10	16	10	10	11	11	1.7
4	10	10	16	10	10	11	11	1.9
4.5	10	10	16	10	10	11	12	2.1
5	10	10	16	10	10	11	12	2.2
5.5	10	10	16	10	10	11	12	2.2
6	10	10	16	10	10	11	12	2.3

Tabelle 4.34: Simulationsergebnisse für den erzielten SNR_{dB} , gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\varrho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-1}$). Fehlerverschleierung nur für die ersten 4 Transformationskoeffizienten. Quellenmodell: sep. 2D-AR(1). Orthonormale Transformationen sind separierbar zweidimensional.

R	KLT	DCT	DST	CCT_0	$CCT_{0.01}$	$CCT_{0.02}$	$CCT_{0.2}$	$CCT_{0.4}$
1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1	0.97
1.5	1.5	1.5	1.4	1.5	1.5	1.5	1.5	1.4
2	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9
2.5	2.3	2.3	2.4	2.3	2.5	2.3	2.4	2.6
3	2.8	2.8	2.8	2.9	2.9	2.9	2.9	2.8
3.5	3.2	3.2	3.4	3.2	3.4	3.2	3.3	3.5
4	3.7	3.7	3.7	3.8	3.8	3.8	3.8	3.7
4.5	4.1	4.1	4.3	4.1	4.3	4.1	4.1	4.3
5	4.5	4.5	4.5	4.6	4.6	4.6	4.7	4.6
5.5	4.9	4.9	5.1	4.9	5.1	4.9	5	5.1
6	5.4	5.4	5.4	5.4	5.4	5.4	5.5	5.4

Tabelle 4.35: Simulationsergebnisse für die erzielte Entropierate in Bit/Koeffizient, gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\varrho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-1}$). Quellenmodell: sep. 2D-AR(1). Orthonormale Transformationen sind separierbar zweidimensional. Die Entropie wird über das Histogrammverfahren ermittelt.

R	KLT	DCT	DST	CCT_0	$CCT_{0.01}$	$CCT_{0.02}$	$CCT_{0.2}$	$CCT_{0.4}$
1	9.6	9.7	12	9.7	9.8	10	6.2	-3
1.5	9.8	9.9	12	9.9	10	10	8	-2.1
2	9.9	10	13	10	10	10	8.5	-1.1
2.5	10	10	14	10	10	11	9.5	-0.044
3	10	10	14	10	10	11	10	0.21
3.5	10	10	14	10	10	11	10	0.62
4	10	10	14	10	10	11	10	0.76
4.5	10	10	14	10	10	11	11	0.88
5	10	10	14	10	10	11	11	0.93
5.5	10	10	14	10	10	11	11	0.98
6	10	10	14	10	10	11	11	0.99

Tabelle 4.36: Simulationsergebnisse für den erzielten SNR_{dB} , gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\varrho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-1}$). Fehlerverschleierung nur für die ersten 2 Transformationskoeffizienten. Quellenmodell: sep. 2D-AR(1). Orthogonale Transformationen sind separierbar zweidimensional.

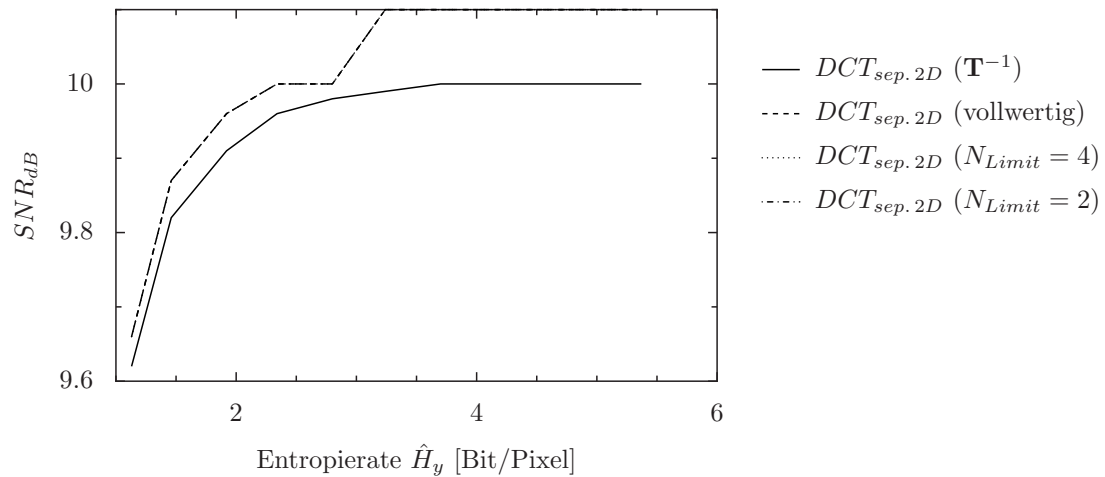


Abbildung 4.61: Evaluierung der Begrenzung der Fehlerkorrektur auf die ersten N_{Limit} Transformationskoeffizienten für die separierbare zweidimensionale DCT ($N = 16$, $\rho = 0.96$, $P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

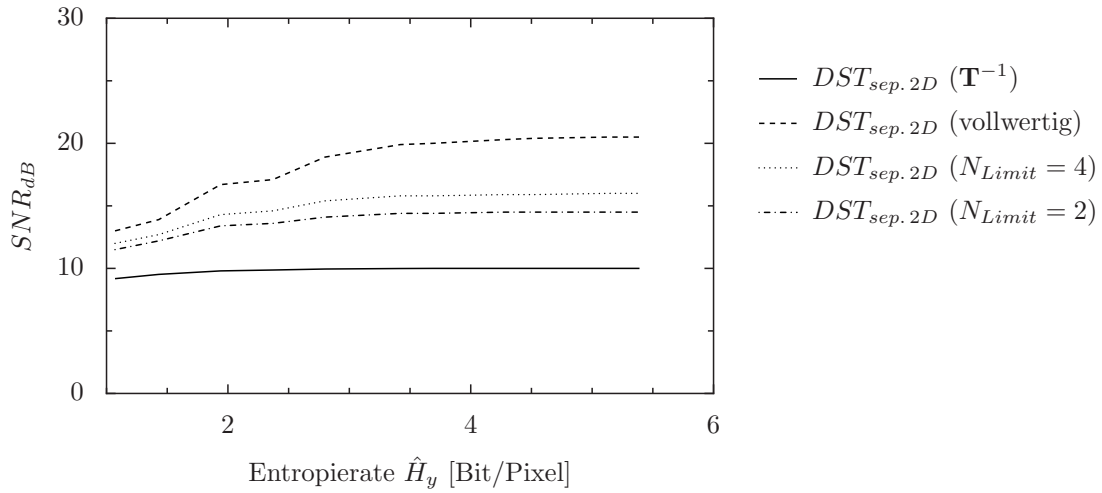


Abbildung 4.62: Evaluierung der Begrenzung der Fehlerkorrektur auf die ersten N_{Limit} Transformationskoeffizienten für die separierbare zweidimensionale DST ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

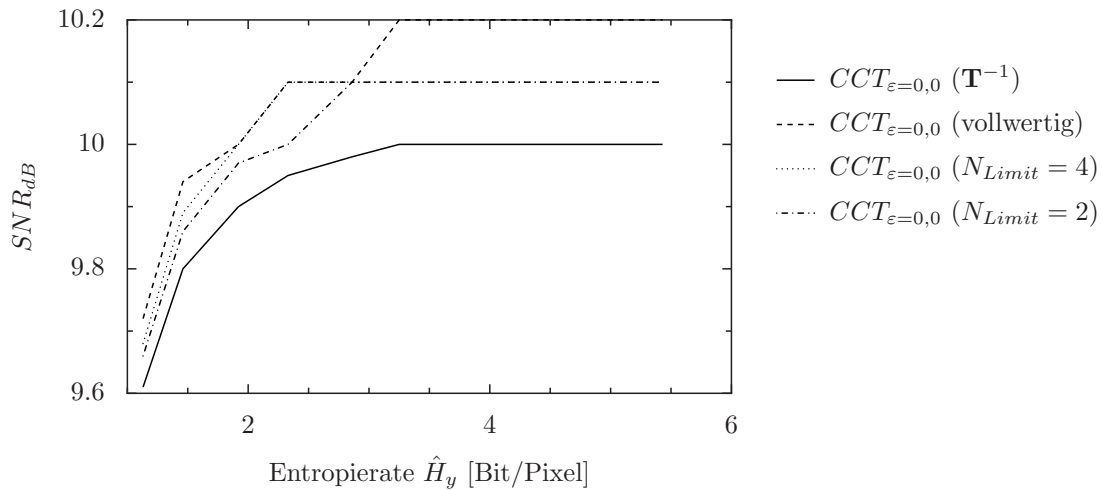


Abbildung 4.63: Evaluierung der Begrenzung der Fehlerkorrektur auf die ersten N_{Limit} Transformationskoeffizienten für die $CCT_{\epsilon=0,0}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

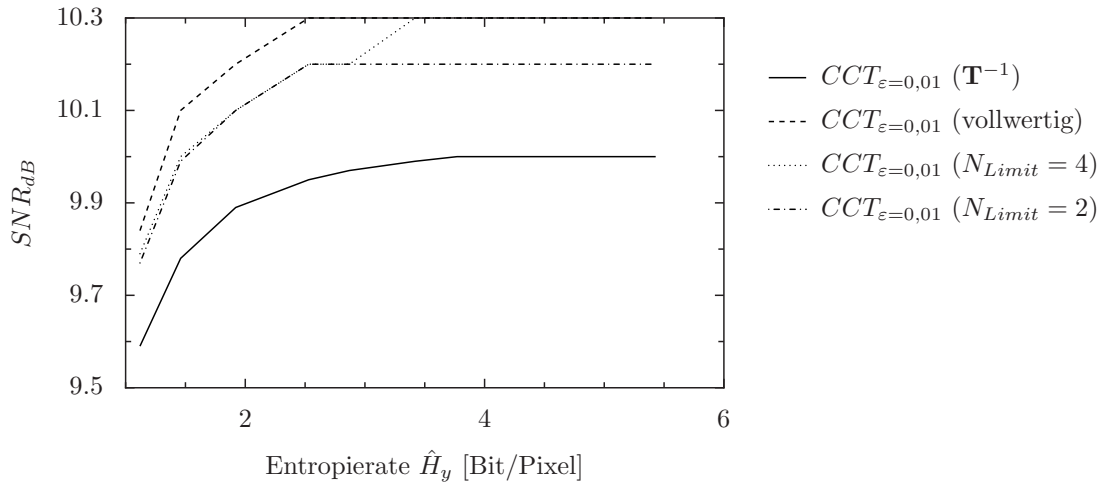


Abbildung 4.64: Evaluierung der Begrenzung der Fehlerkorrektur auf die ersten N_{Limit} Transformationskoeffizienten für die $CCT_{\epsilon=0,01}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

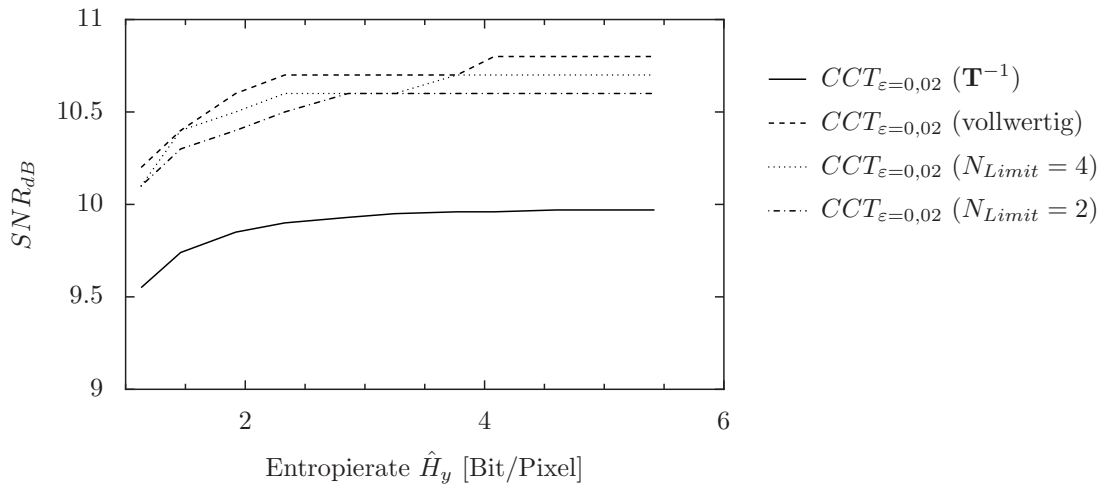


Abbildung 4.65: Evaluierung der Begrenzung der Fehlerkorrektur auf die ersten N_{Limit} Transformationskoeffizienten für die $CCT_{\epsilon=0,02}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

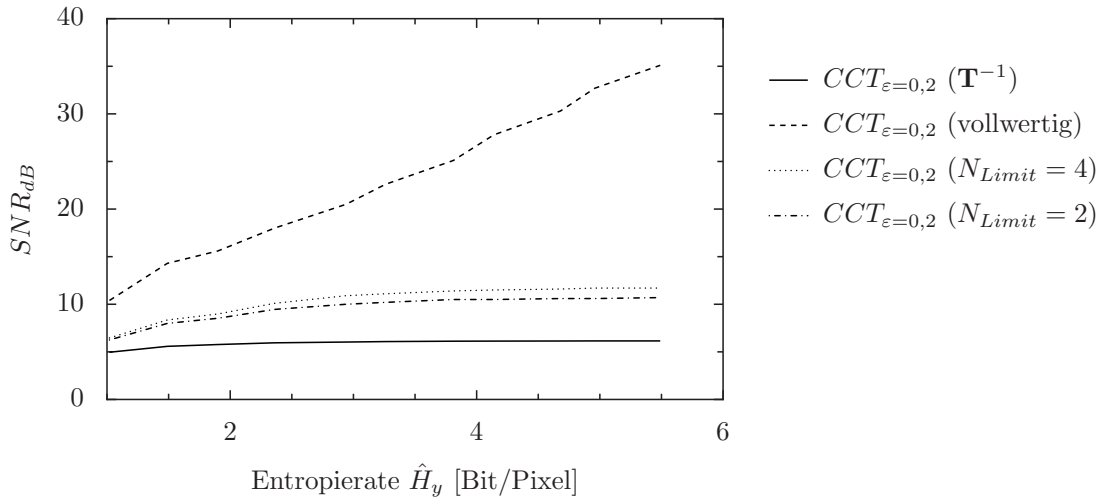


Abbildung 4.66: Evaluierung der Begrenzung der Fehlerkorrektur auf die ersten N_{Limit} Transformationskoeffizienten für die $CCT_{\epsilon=0,2}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

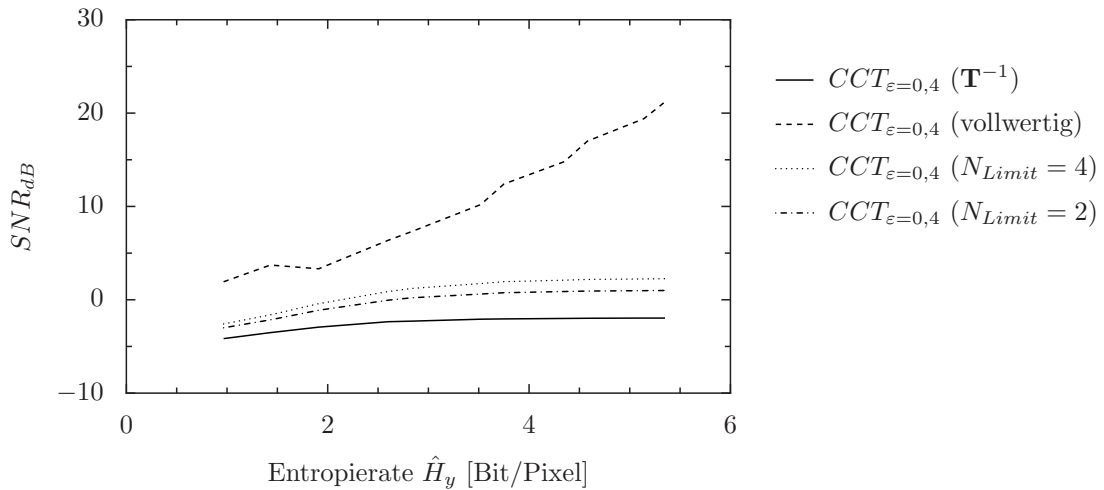


Abbildung 4.67: Evaluierung der Begrenzung der Fehlerkorrektur auf die ersten N_{Limit} Transformationskoeffizienten für die $CCT_{\epsilon=0,4}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-1}$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

4.5.5 Korrektur von Nullquantisierungen

In diesem Abschnitt wird untersucht, inwieweit die Schätzlösung aus Gleichung 2.106 jenseits der Kanalfehlerkorrektur zur Verbesserung der Rekonstruktion aus stark quantisierten Transformationskoeffizienten verwendet werden kann, indem Koeffizienten, denen die Bitzuteilung keine Bits mehr zugeordnet hat, die Rolle von ausgefallenen Koeffizienten einnehmen.

Untersucht wurden nur die separierbaren zweidimensionalen orthonormalen Transformationen, bei den Untersuchungen wurden die Kanalfehler mit $P_{err} = 0$ abgeschaltet. Die vergleichenden Ergebnisse für die Rekonstruktion mit der beschriebenen Technik und der Rekonstruktion ohne diese Technik, d.h. mit der normalen inversen Transformation $\mathbf{T}_{inv.}$, sind in den Abbildungen 4.68 bis 4.71 dargestellt.

Die numerischen Ergebnisse für die Rekonstruktion ohne die Korrektur sind in der Tabelle 4.38 enthalten, die Ergebnisse für die Rekonstruktion mit der Korrektur von zu Null quantisierten Koeffizienten sind in der Tabelle 4.37 enthalten.

R	KLT	DCT	DST	CCT_0	$CCT_{0.01}$	$CCT_{0.02}$	$CCT_{0.2}$	$CCT_{0.4}$
1	20	20	17	20	20	19	10	1.8
1.5	23	23	19	22	22	22	14	5.1
2	25	26	23	25	25	25	16	3.6
2.5	28	28	24	28	28	28	18	7.9
3	31	31	27	31	30	30	20	7.5
3.5	34	34	31	33	34	33	23	11
4	36	36	32	36	36	36	25	13
4.5	39	39	36	38	39	38	28	16
5	41	41	38	41	41	41	30	17
5.5	44	44	41	43	44	43	33	21
6	46	46	43	46	46	45	35	22

Tabelle 4.37: Simulationsergebnisse für den erzielten SNR_{dB} , gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16, \rho = 0.96, P_{err} = 0$). Quellenmodell: sep. 2D-AR(1). Orthonormale Transformationen sind separierbar zweidimensional.

Aus den Abbildungen kann man ersehen, daß sich diese Technik für alle untersuchten orthonormalen Transformation für Raten $R \leq 2,5$ Bit/Pixel anbietet. Der SNR_{dB} verbessert sich in diesem Bereich um ≈ 10 dB.

Diese Technik kann in der Praxis gerade bei Anwendungen mit konstanter Bitratenzuweisung leicht eingesetzt werden, da dann auch die optimale inverse Transformationsmatrix dann nur einmal berechnet werden muß bzw. bei fester Rate sogar fest in den Dekoder eingebaut werden kann.

R	KLT	DCT	DST	CCT_0	$CCT_{0.01}$	$CCT_{0.02}$	$CCT_{0.2}$	$CCT_{0.4}$
1	-3.7	-3.7	-3.2	-3.2	-3.2	-3.2	-4.2	-9
1.5	-1.7	-1.7	-1.2	-1.2	-1.2	-1.2	-3.3	-8
2	-0.45	0.72	1	5.7	5.7	5.7	3.4	-2.2
2.5	5.4	5.4	5.7	26	28	28	18	6.7
3	31	31	27	31	30	30	20	7.5
3.5	34	34	31	33	34	33	23	11
4	36	36	32	36	36	36	25	13
4.5	39	39	36	38	39	38	28	16
5	41	41	38	41	41	41	30	17
5.5	44	44	41	43	44	43	33	21
6	46	46	43	46	46	45	35	22

Tabelle 4.38: Simulationsergebnisse für den erzielten SNR_{dB} , gemittelt über 100000 Versuche ($N = 16$, $\rho = 0.96$, $P_{err} = 0$). Nullquantisierte Transformationskoeffizienten werden nicht zum Fehlervektor gezählt. Quellenmodell: sep. 2D-AR(1). Orthonormale Transformationen sind separierbar zweidimensional. Die Entropie wird über das Histogrammverfahren ermittelt.

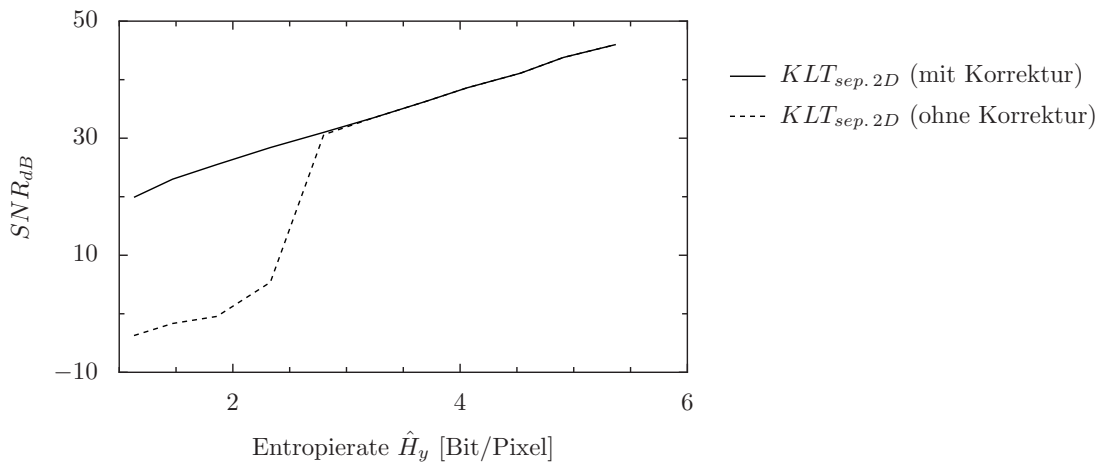


Abbildung 4.68: Ergebnisse für die Korrektur von Nullquantisierungen für das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell und für die separierbare zweidimensionale KLT ($N = 16$, $\rho = 0.96$, $P_{err} = 0$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

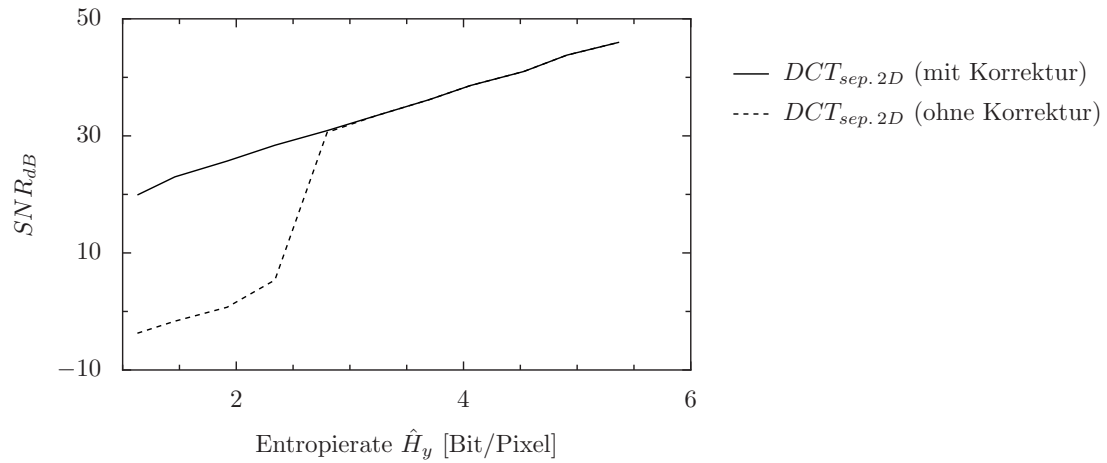


Abbildung 4.69: Ergebnisse für die Korrektur von Nullquantisierungen für das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell und für die separierbare zweidimensionale DCT ($N = 16, \rho = 0,96, P_{err} = 0$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

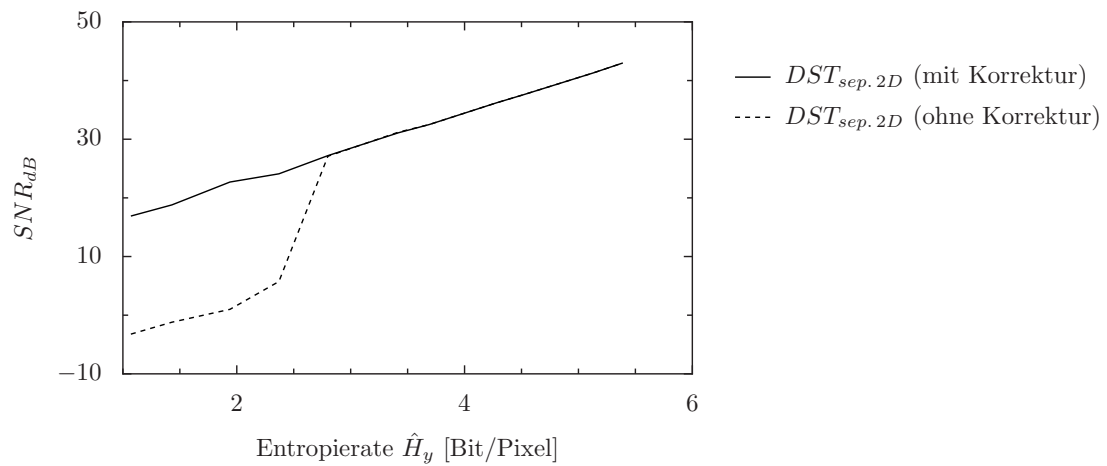


Abbildung 4.70: Ergebnisse für die Korrektur von Nullquantisierungen für das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell und für die separierbare zweidimensionale DST ($N = 16, \rho = 0,96, P_{err} = 0$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

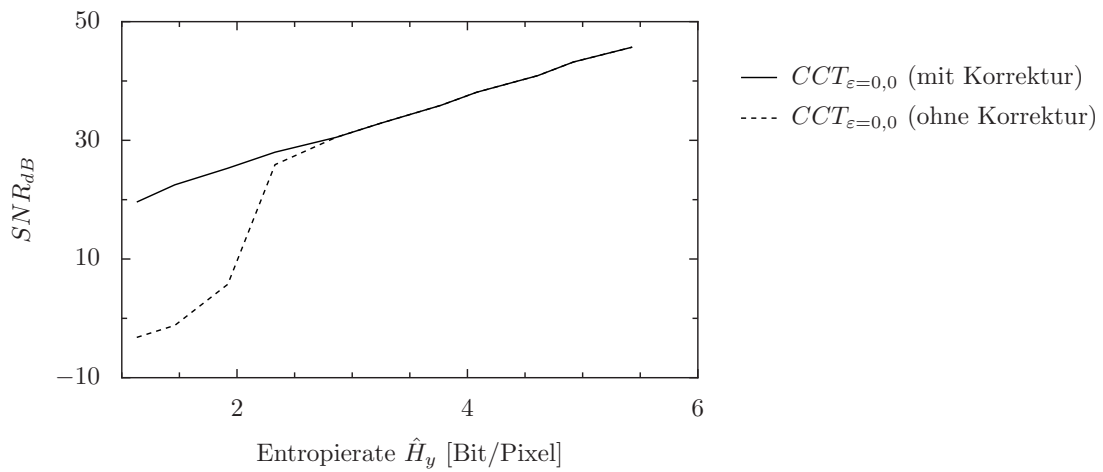


Abbildung 4.71: Ergebnisse für die Korrektur von Nullquantisierungen für das separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellenmodell und für die $CCT_{\varepsilon=0}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 0$, Ergebnisse über 100000 Versuche gemittelt).

4.5.6 Vergleich mit der theoretischen Gesamtbetrachtung für das zweidimensionale Szenario.

In diesem Abschnitt werden die Simulationsergebnisse für das im Bereich der Bild/Videosignalverarbeitung wichtige Szenario der Transformation separierbarer zweidimensionaler AR(1)-Daten mit separierbaren zweidimensionalen Transformationen auf Übereinstimmung mit dem theoretischen Modell aus dem Abschnitt 4.4 untersucht.

Der Vergleich der theoretischen Vorhersage laut Gleichung 4.176 mit den Simulationsergebnissen zeigt für die KLT (s. Abbildung 4.72), die DCT (s. Abbildung 4.73) und die orthonormale CCT (s. Abbildung 4.75) praktisch exakte Übereinstimmung, für die leicht nichtorthogonalen CCT-Varianten mit $\varepsilon = 0,02$ (s. Abbildung 4.76) ergeben sich bis auf kleine Abweichungen für geringe Raten nahezu exakte Übereinstimmungen zwischen den Simulationsergebnissen und dem theoretischen Modell.

Die Simulationsergebnisse DST bleibt gemäß Abbildung 4.74 für den Bereich geringerer Raten leicht unterhalb der Ergebnisse für das theoretische Modell, die Simulationsergebnisse für die stärker nichtorthogonalen CCT-Varianten mit $\varepsilon = 0,2$ bzw. $\varepsilon = 0,4$ liegen gemäß den Abbildungen 4.37 und 4.38 mit etwas größerem Abstand zu den theoretischen Vorhersagen.

Zusammenfassend kann mit diesen Ergebnissen die im Abschnitt 4.4 erarbeitete Gesamtbetrachtung durch die Simulationsergebnisse auch für separierbare zweidimensionale AR(1)-Quellensignale und separierbare zweidimensionale Transformationen bestätigt werden, wobei die Übereinstimmung noch etwas besser ist als im eindimensionalen Szenario.

Für die stärker nichtorthogonalen CCT-Varianten ergeben sich zwar wiederum größere Abweichungen, doch folgen auch hier die Ergebnisse den theoretischen Vorhersagen.

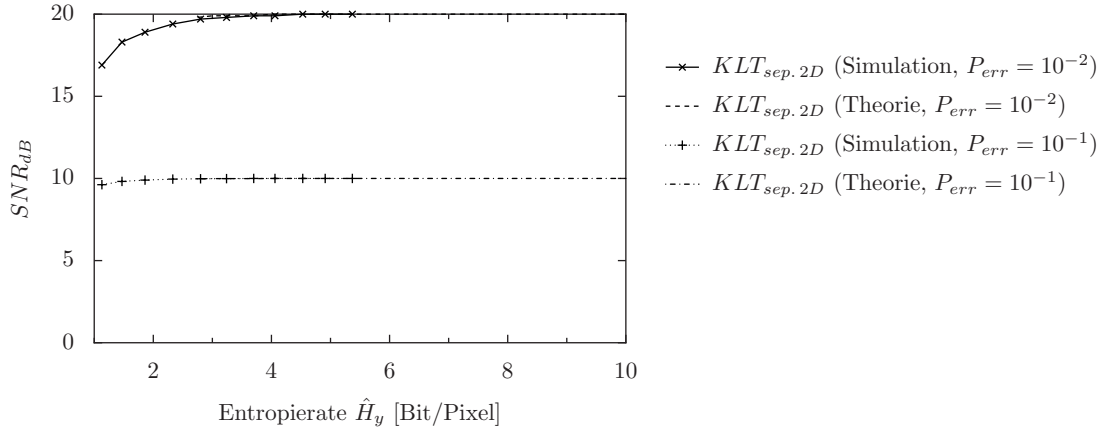


Abbildung 4.72: Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für separierbare zweidimensionale AR(1)-Signale und die separierbare zweidimensionale KLT ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 2D AR(1)-Modell).

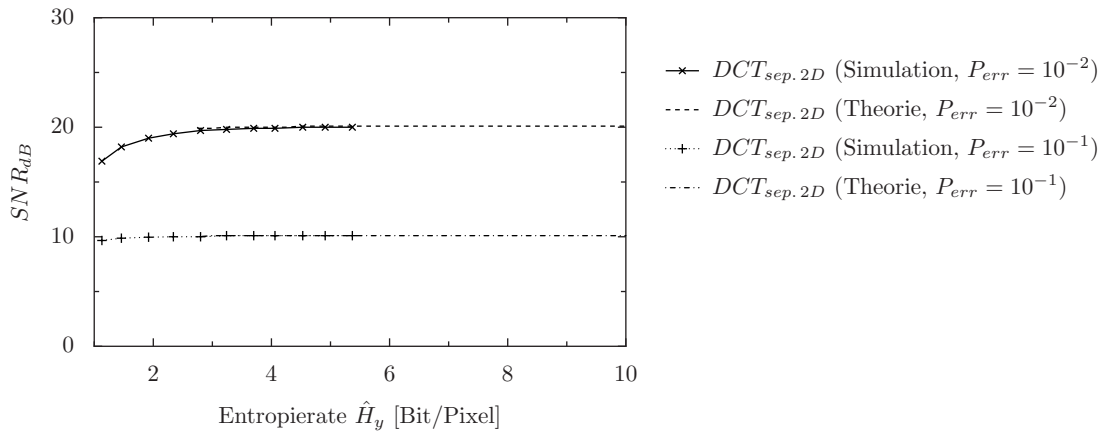


Abbildung 4.73: Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für separierbare zweidimensionale AR(1)-Signale und die separierbare zweidimensionale DCT ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 2D AR(1)-Modell).

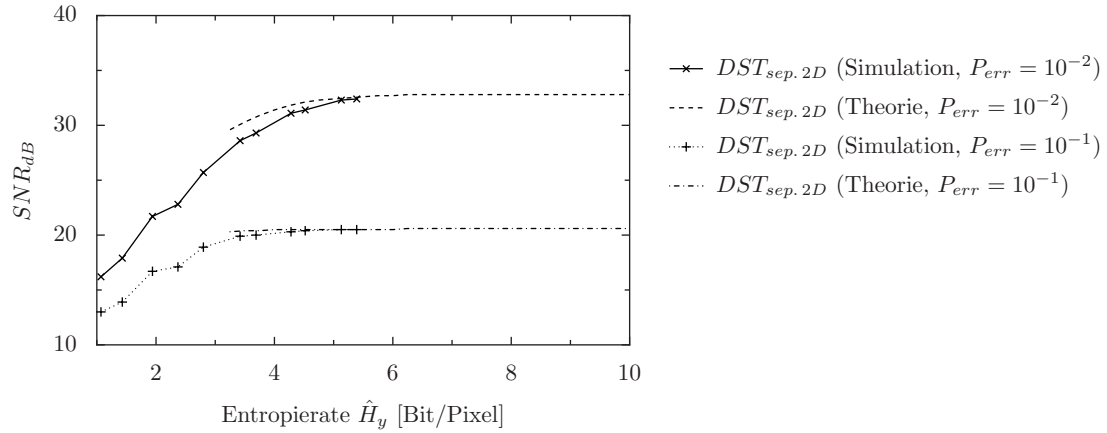


Abbildung 4.74: Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für separierbare zweidimensionale AR(1)-Signale und die separierbare zweidimensionale DST ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 2D AR(1)-Modell).

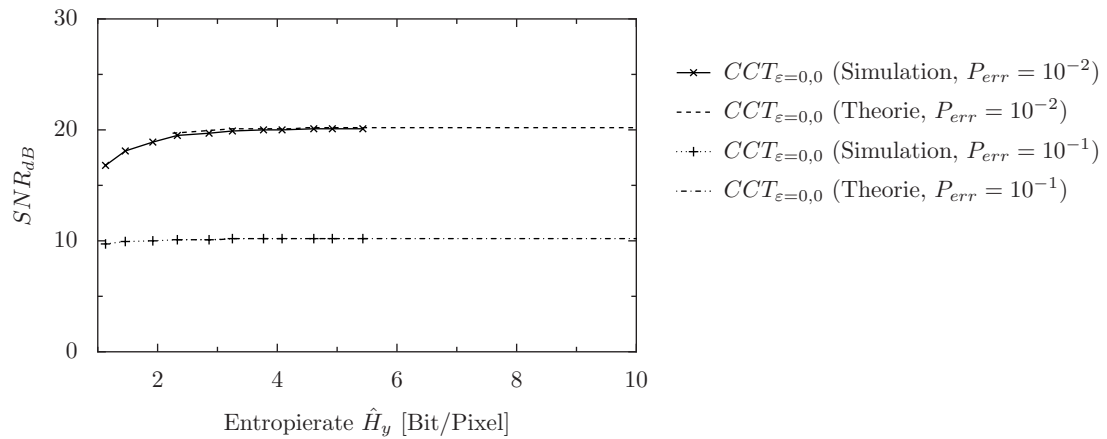


Abbildung 4.75: Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für separierbare zweidimensionale AR(1)-Signale und die $CCT_{\epsilon=0}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 2D AR(1)-Modell).

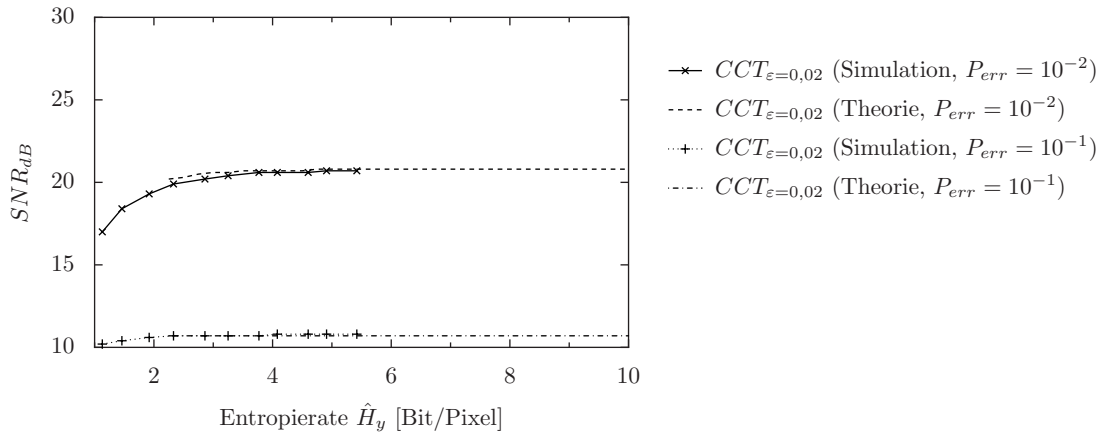


Abbildung 4.76: Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für separierbare zweidimensionale AR(1)-Signale und die $CCT_{\epsilon=0,02}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 2D AR(1)-Modell).

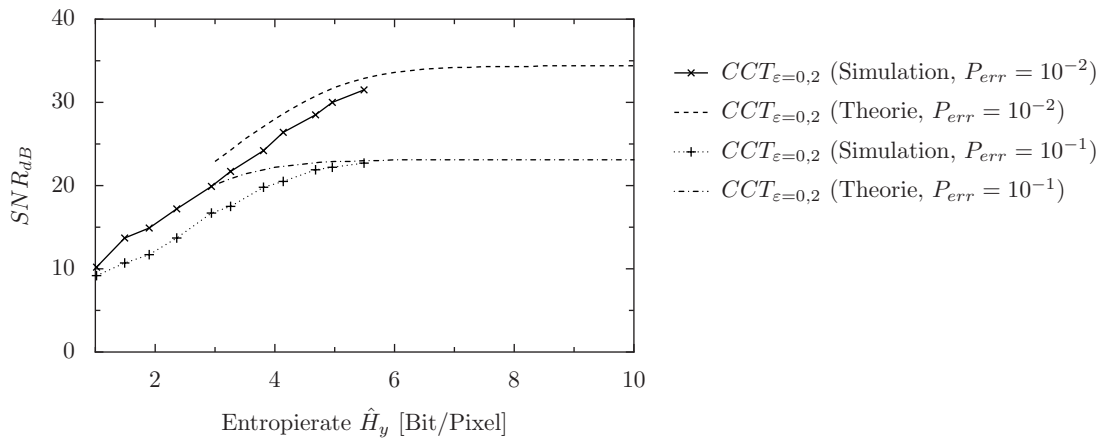


Abbildung 4.77: Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für separierbare zweidimensionale AR(1)-Signale und die $CCT_{\epsilon=0,2}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 2D AR(1)-Modell).

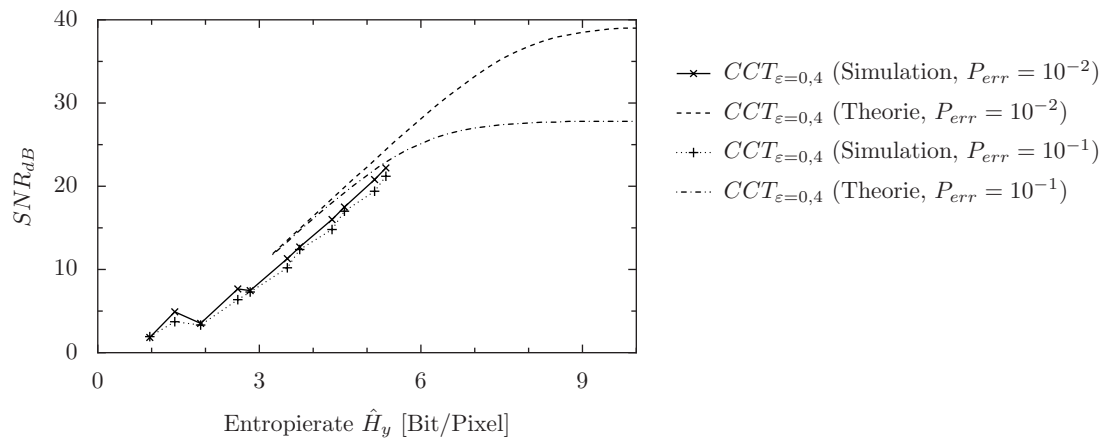


Abbildung 4.78: Vergleich der Simulationsergebnisse mit der theoretischen Vorhersage für separierbare zweidimensionale AR(1)-Signale und die $CCT_{\epsilon=0,4}$ ($N = 16$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, 2D AR(1)-Modell).

4.6 Ergebnisse für ein abgeschwächtes Echtzeit-szenario

Hat die Echtzeitübertragung nicht die oberste Priorität beim Systementwurf, so ist ein sofortiges Senden der Pakete nicht unbedingt erforderlich. Vielmehr würde erst gewartet werden, bis eine bestimmte (Mindest-)Bitmenge zusammengekommen ist bevor für den jeweiligen Teilkanal eine Übertragung gestartet werden würde.

Gemäß den Untersuchungen aus dem Abschnitt 4.2.1.1 gilt auch für die nichtorthonormalen Transformationen Gleichung 4.27 für die Bitzuteilung. Da diese den Anteil der zugeteilten Bits proportional zu der Varianz der Transformationskoeffizienten setzt, erhalten die signifikanten Transformationskoeffizienten eine deutlich höhere Bitrate als die insignifikanten Transformationskoeffizienten.

Bei gegebener Paketgröße N_P ergibt sich somit eine unterschiedliche mittlere Anzahl von Koeffizienten pro Datenpaket

$$\eta_k = \left\lceil \frac{N_P}{R_k} \right\rceil \quad (4.181)$$

auf dem jeweiligen Kanal k .

Geht man weiterhin von unabhängigen Paketverlusten mit der Paketrate P_P aus, so ergibt sich eine effektive Koeffizientenausfallrate pro Kanal

$$P_{K_k} = \eta_k \cdot P_P . \quad (4.182)$$

Somit ergibt sich die Auftretenswahrscheinlichkeit eines Fehlermusters

$$\mathbf{E} = \{e_k\} \quad (4.183)$$

mit

$$e_k = \begin{cases} 1 & : \text{Koeffizient k verfügbar} \\ 0 & : \text{Koeffizient k nicht verfügbar} \end{cases} \quad (4.184)$$

zu

$$P_{\mathbf{E}} = \prod_{k=1}^N (1 - e_k) \cdot P_{K_k} + e_k \cdot (1 - P_{K_k}) \quad (4.185)$$

$$= P_P \cdot \prod_{k=1}^N (1 - e_k) \cdot \eta_k + e_k \cdot (1 - \eta_k) . \quad (4.186)$$

Die Gesamtfehlervarianz ergibt sich wiederum über die Bildung des Erwartungswertes

$$\sigma_d^2 = \sum_{k=1}^{2^N} P_{\mathbf{E}_k} \cdot \sigma_{\mathbf{E}_k}^2. \quad (4.187)$$

4.6.1 Evaluierung des paketerorientierten Szenarios

Zur Evaluierung des paketerorientierten Szenarios wurde das Evaluierungsprogramm *AR1Simulation* aus dem Abschnitt 4.5 in einem frühen Stadium so verändert, daß die von den Entropiecodierern gelieferten Bits auf jedem Kanal so lange gesammelt werden, bis eine vorgegebene Mindestbitmenge erreicht worden ist. Die gesammelten Bits werden paketweise über die N unabhängigen Kanäle mit gedächtnisloser Störung gesendet, welche die Pakete entweder rechtzeitig ankommen läßt oder ausfallen läßt. Die Vorgabe von P_{err} bezieht sich somit auf die Paketausfallrate.

Die Daten wurden noch mit dem eindimensionalen AR(1)-Modell modelliert, da zu dem Zeitpunkt der Abzweigung vom *AR1Simulation* dort nur das eindimensionale Szenario untersucht worden ist.

Die paketweise erfolgende Übertragung, die im Falle des Simulationsprogramms *AR1SimulationPaket* nun auch komplett ausgeführt wird, ist der einzige Unterschied zu dem Vorgänger *AR1Simulation*.

Der Parametersatz wurde um den Parameter **Npaket** ergänzt, mit welchem sich die Anzahl an Bits / Paket einstellen läßt. Das Programm warnt, wenn die Paketlänge unter der maximalen Symbollänge der Huffmancodierung liegt und gibt die Mindestgröße an. Andernfalls werden die Pakete teilweise deutlich größer als die vorgegebene Paketgröße werden. Das Programm errechnet für jeden einzelnen Transformationsversuch ebenfalls die mittlere Paketgröße und gibt diese auf die Kommandozeile aus.

Intern wird die Paketübertragung mittels des neuen Datentyps *paket* realisiert. Dieser hat zwei Komponenten:

nutzlast Der Huffman-entropiecodierte Bitstrom.

koeff_beginn Der Index des ersten kodierten Koeffizienten im Bitstrom.

Die Pakete werden für jeden der N Koeffizientenkanäle in den STL-Listen *empfangspuffer* von Zeigern auf *paket* aufgespeichert.

Die Ausfallsimulation erfolgt durch den folgenden Programmteil:

```
for (unsigned int k=0;k<N;k++)
```



```
{
    unsigned long int paketindex=0;
    list<paket *> &liste=empfangspuffer(k);
    for(list<paket *>::iterator it=liste.begin(); it
        != liste.end() && paketindex < Nsim && !liste.
        empty(); paketindex++)
    {
        if(Fehlermatrix(k,paketindex)==0)
        {
            delete *it;
            it=liste.erase(it);
        }
        else ++it;
    }
}
```

Anhand der vorher direkt für die Koeffizienten geltenden Ausfallmatrix *Fehlermatrix* wird nun entschieden, ob die Pakete rechtzeitig ankommen oder nicht. Somit gelten für alle Transformationen die gleichen Ausfallssequenzen, da die Fehlermatrix für alle Kombinationen aus Transformationen und Raten gleich ist.

Der folgende Programmteil nimmt die Dekodierung der Pakete vor:

```
koeff_ausfallmatrix.clear();
// loesche Matrix der rekonstruierten y-Werte
yr.clear();
// Für alle Transformationskoeffizienten
for(unsigned int k=0;k<N;k++)
{
    list<paket *> &liste=empfangspuffer(k);
    while(!liste.empty())
    {
        paket *p=liste.front();
        Vec<unsigned int> koeff=H(k).decode(p->
            nutzlast);
        unsigned long int anfang=p->koeff_beginn;
        for(unsigned int l=0;l<(unsigned int)
            koeff.length();l++)
        {
            yr(k,anfang+l)=Q(k).inv_quant(
                koeff(l));
            koeff_ausfallmatrix(k,anfang+l)=1;
        }
        delete p;
    }
}
```

```
        // erstes Element entfernen
        liste.pop_front();
    }
}
```

Die Inhalte der Pakete werden dekodiert und der inversen Quantisierung unterzogen. Anschließend werden die erhaltenen Werte in die Matrix der rekonstruierten Transformationskoeffizienten geschrieben und gleichzeitig in der Matrix *koeff_ausfallmatrix* als empfangen vermerkt. Diese Matrix ist für die inverse Transformation die eigentliche Ausfallmatrix, da sie den Koeffizientenausfall angibt.

Der weitere Programmablauf entspricht dann dem vom Vorgänger *AR1Simulation*.

4.6.2 Ergebnisse für N=4

Interessant ist bei dieser Evaluierung vor allem der Unterschied zu dem im Programm *AR1Simulation* verwendeten Szenario, der sofortigen Übertragung der Pakete.

Deshalb wurde mit dem Parametersatz $N = 4$, $P_{err} = 10^{-2}$ und $\varrho = 0,96$ das selbe Szenario noch einmal simuliert, nur daß jetzt die Koeffizienten in Paketen mit einer Ziellänge von 1024 Bit gesammelt werden.

Die Ergebnisse des Vergleichs in den Abbildungen 4.79 bis 4.82 zeigen, daß die Resultate vergleichbar sind. Die Ergebnisse der paketerorientierten Verarbeitung sind sogar etwas besser. Bei der geringen Paketausfallwahrscheinlichkeit scheint es also im Rahmen des simulierten Szenarios zu weniger Koeffizientenausfällen zu kommen als bei der sofortigen, direkten Übertragung.

Wichtig ist vor allem, daß die Ergebnisse vergleichbar sind und somit die theoretische Beschreibung für die Gesamtbilanz aus dem Abschnitt 4.4 auch für das paketerorientierte Szenario anwendbar ist.

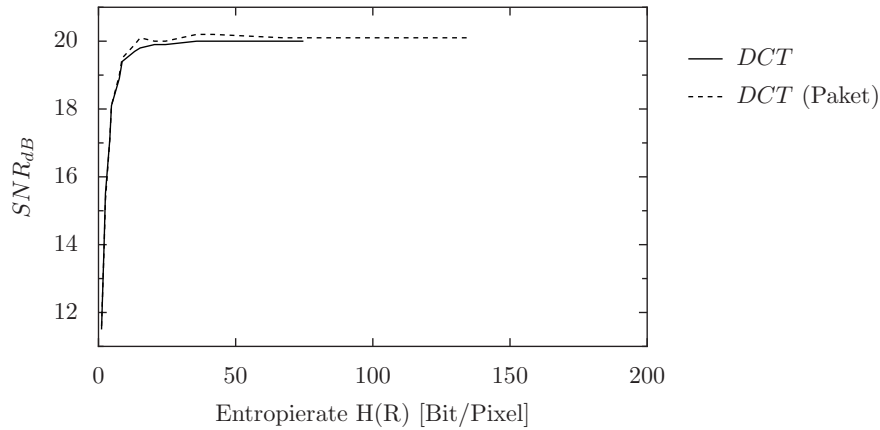


Abbildung 4.79: Vergleich zwischen dem Szenario der sofortigen Übertragung und einer paketerorientierten Übertragung (DCT nur mit \mathbf{T}^{-1} , $N = 4$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Paketziellänge=1024 Bit, Ergebnisse über 1000000 Versuche gemittelt).

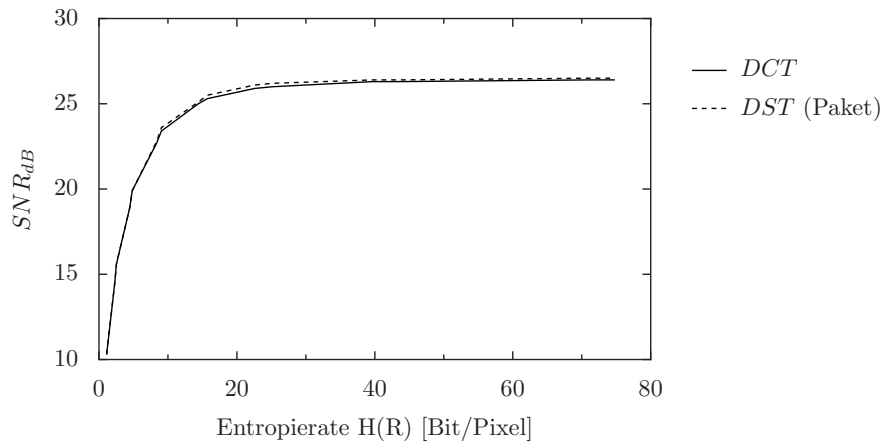


Abbildung 4.80: Vergleich zwischen dem Szenario der sofortigen Übertragung und einer paketerorientierten Übertragung (DST mit Schätzer, $N = 4$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Paketziellänge=1024 Bit, Ergebnisse über 1000000 Versuche gemittelt).

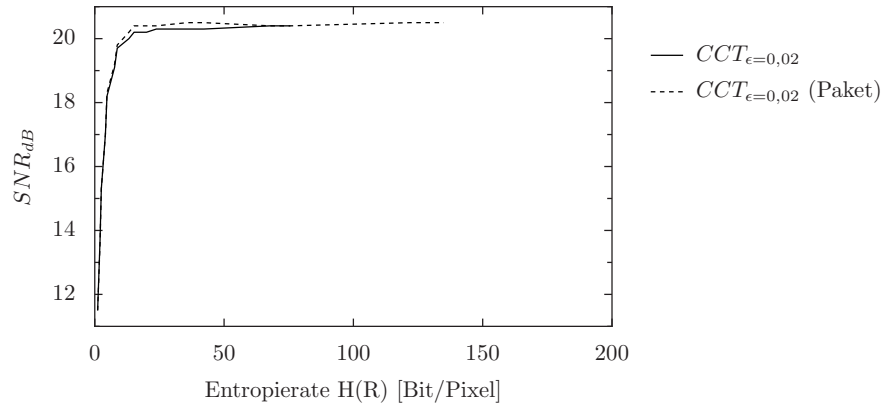


Abbildung 4.81: Vergleich zwischen dem Szenario der sofortigen Übertragung und einer paketorientierten Übertragung ($CCT_{\epsilon=0,02}$ nur mit \mathbf{T}^{-1} , $N = 4$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Paketziellänge=1024 Bit, Ergebnisse über 1000000 Versuche gemittelt).

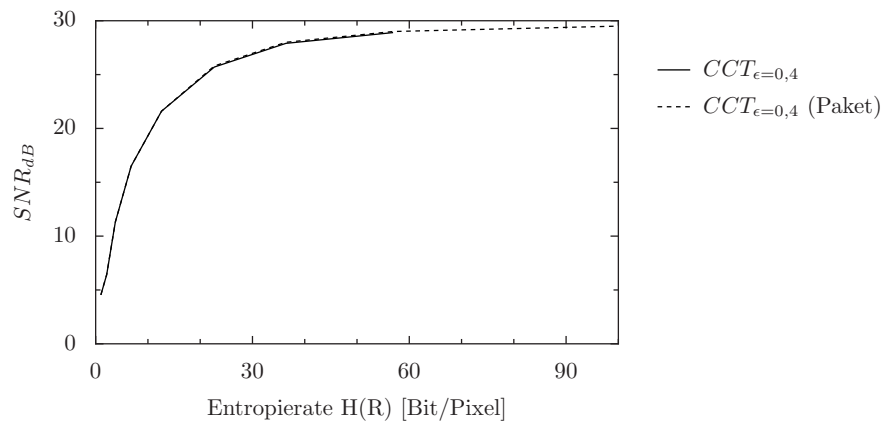


Abbildung 4.82: Vergleich zwischen dem Szenario der sofortigen Übertragung und einer paketorientierten Übertragung ($CCT_{\epsilon=0,4}$ nur mit \mathbf{T}^{-1} , $N = 4$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Paketziellänge=1024 Bit, Ergebnisse über 1000000 Versuche gemittelt).

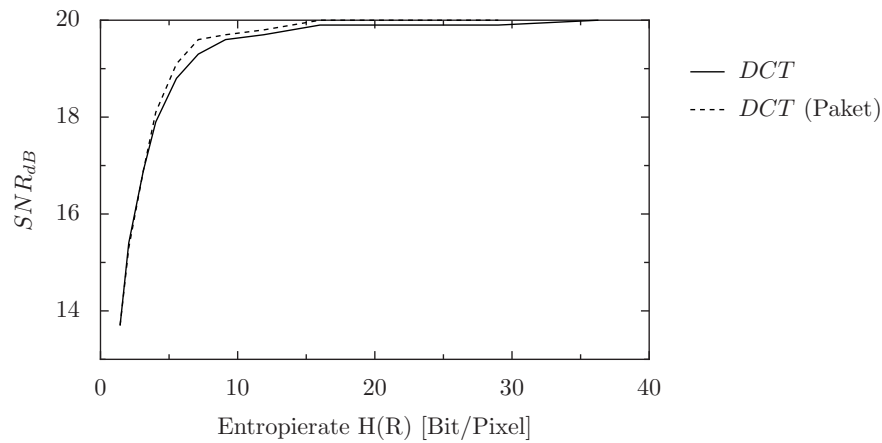


Abbildung 4.83: Vergleich zwischen dem Szenario der sofortigen Übertragung und einer paketerorientierten Übertragung (DCT nur mit \mathbf{T}^{-1} , $N = 4$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Paketziellänge=1024 Bit, Ergebnisse über 1000000 Versuche gemittelt).

4.6.3 Ergebnisse für $N=16$

Auch für die Transformationsgröße $N=16$ ergaben sich keine anderen Resultate. Somit kann Gleichung 4.176 mit den in Abschnitt 4.5.2 genannten Einschränkungen auch für das paketerorientierte Szenario verwendet werden.

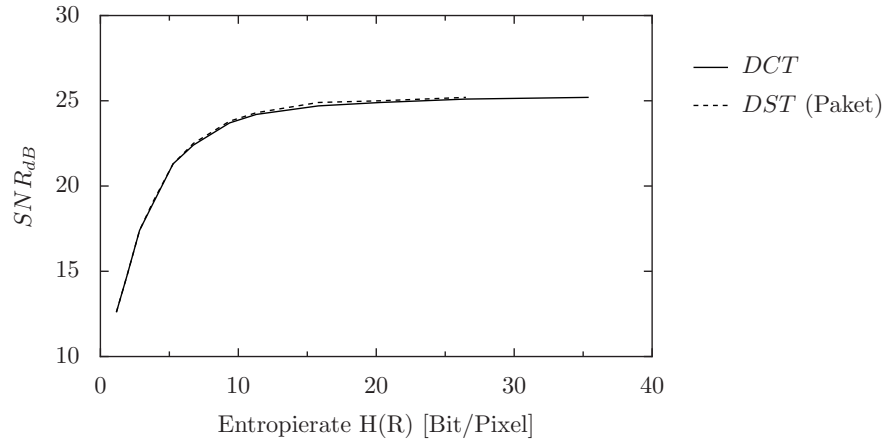


Abbildung 4.84: Vergleich zwischen dem Szenario der sofortigen Übertragung und einer paketorientierten Übertragung (DST mit Schätzer, $N = 4$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Paketziellänge=1024 Bit, Ergebnisse über 1000000 Versuche gemittelt).

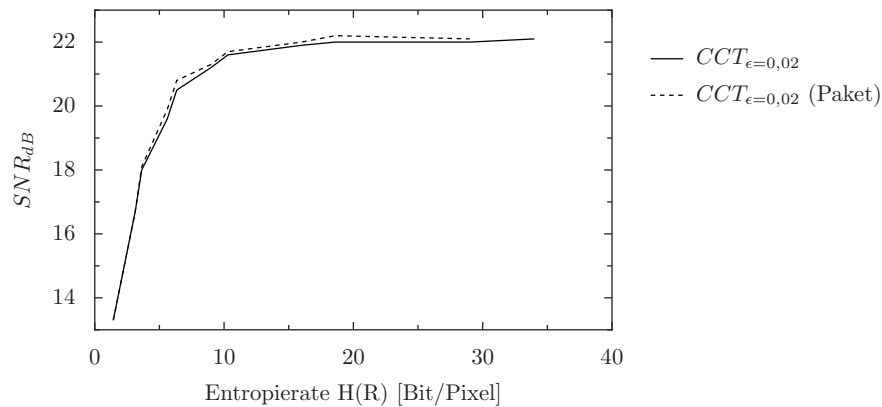


Abbildung 4.85: Vergleich zwischen dem Szenario der sofortigen Übertragung und einer paketorientierten Übertragung ($CCT_{\epsilon=0,02}$ nur mit \mathbf{T}^{-1} , $N = 4$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Paketziellänge=1024 Bit, Ergebnisse über 1000000 Versuche gemittelt).

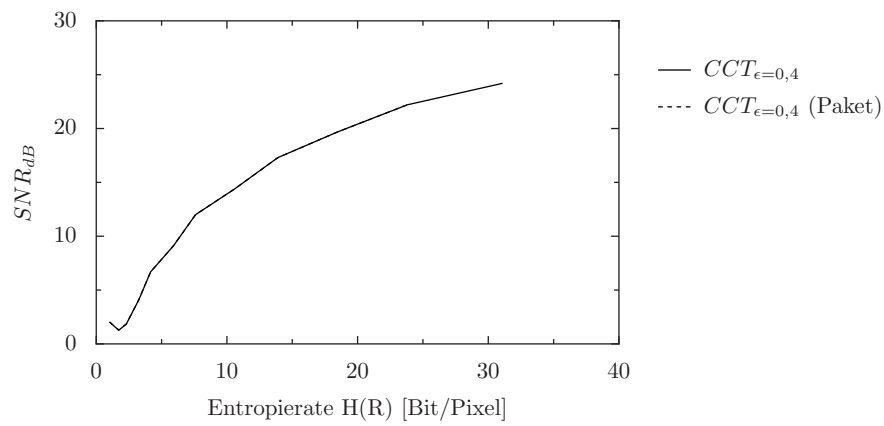


Abbildung 4.86: Vergleich zwischen dem Szenario der sofortigen Übertragung und einer paketorientierten Übertragung ($CCT_{\epsilon=0,4}$ nur mit \mathbf{T}^{-1} , $N = 4$, $\rho = 0,96$, $P_{err} = 10^{-2}$, Paketziellänge=1024 Bit, Ergebnisse über 1000000 Versuche gemittelt).

Kapitel 5

Schlußbetrachtung

5.1 Resümee

Im Rahmen dieser Arbeit wurde erfolgreich ein Quellen/Kanal-Verbundcodierer für eine *Multiple Description Transform Coding*-Lösung erarbeitet und hinsichtlich seiner theoretischen und praktischen Grenzen untersucht.

Zu den wesentlichen Erkenntnissen dieser Arbeit zählt die verallgemeinerte Wiener-Schätzlösung im Frequenzbereich nach Gleichung 2.106, die äquivalenten eindimensionalen Transformationen zu den separierbarer zweidimensionaler Transformationen gemäß Abschnitt 2.2.3, welche die Anwendbarkeit des Ansatzes auf separierbare zweidimensionaler Transformationen ausdehnte, sowie die im Abschnitt 2.1.3 beschriebene CCT-Transformation.

Mit dieser CCT-Transformation ist die von Goyal et al in [GKAV] angedachte Kaskadierung der elementaren korrelierenden $N = 2$ -Transformation evaluiert.

Von besonderer Wichtigkeit sind die guten Resultate für die DST im Verbund mit der Schätzlösung nach Gleichung 2.106, auf deren Bedeutung weiter unten eingegangen wird.

Eine nicht unerhebliche praktische Relevanz könnten die Ergebnisse für die verbesserte Rekonstruktion aus stark quantisierten Transformationskoeffizientenvektoren im Abschnitt 4.5.5 haben, da durch Schätzung für die mangels Bitzuteilung nicht mehr übertragenen Transformationskoeffizienten die Rekonstruktionsergebnisse auch bei der in der Praxis wichtigen zweidimensionalen separierbaren DCT deutlich verbessert wurden.

Weitere wesentliche Erkenntnisse sind die erarbeiteten Quellencodierungseigenschaften der CCT im Abschnitt 4.2 sowie die erarbeiteten Kanalcodierungseigenschaften aller Transformationen im Abschnitt 4.3, woraus in der Kombination der Ansatz für die Gesamtverzerrung im Abschnitt 4.4 wurde, der durch die Simula-

tionsergebnisse im Abschnitt 4.5 bestätigt wurde.

Die Evaluierung der Simulationsergebnisse im Abschnitt 4.5 zeigt, daß mit der Kombination von CCT_ε und der Schätzlösung das gewünschte Ziel für kleine Werte von ε erreicht wird. Die Ergebnisse liegen auch für die orthonormale CCT über denen des Quasistandards separierbare zweidimensionale DCT und lassen sich durch leichte Anhebung von ε steigern.

Die Ergebnisse der praktischen Evaluierung im Abschnitt 3.2 zeigen, daß diese Verbesserungen auch hinsichtlich subjektiver Qualitätsmaße signifikant sind.

Allerdings zeigen die Ergebnisse der Simulationen auch, daß mit rein orthonormalen Transformationen wie der DST gerade bei geringeren Bitraten durch die besseren Quellencodierungseigenschaften deutlich bessere Resultate erreichbar sind als mit der CCT. Dies führt zu Überlegungen hinsichtlich eines rein orthonormalen Ansatzes, wie sie im folgenden Abschnitt 5.2 dargelegt sind.

Da die Ergebnisse für die DST im Verbund mit der Schätzlösung auch für geringe Raten mit denen der zweidimensionalen separierbaren DCT vergleichbar sind, für höhere Raten aber gerade bei stärker gestörten Szenarios die von allen einbezogenen Transformationen besten Ergebnisse erzielt werden, ergibt sich mit den vorliegenden Ergebnissen als optimaler Ansatz der einer DST im Verbund mit der Schätzlösung nach Gleichung 2.106, bei dem der Fehlerschutz durch die reine Erhöhung der Bitrate gesteigert werden kann.

Die Evaluierung eines Szenarios mit einer praxisnäheren paketorientierten Verarbeitung im Abschnitt 4.6.1 ergab keine Unterschiede hinsichtlich der Resultate im Vergleich zu dem Basisszenario, welches einen sofortigen Versand der Koeffizienten vorsah.

Für die praktische Anwendung ebenfalls relevant sind die Simulationsergebnisse bei reduzierten Umfang der Schätzung im Abschnitt 4.5.4, da sich so der Aufwand erheblich reduzieren läßt.

Ein direkter Vergleich mit etablierten Verfahren (TC+FEC) gestaltet sich schwierig, da diese auf den Ausfall einzelner Bits statt auf den Ausfall von ganzen Koeffizienten ausgerichtet sind. Die Vergleiche mit den orthonormalen Transformationen sind aber trotzdem gültig, da sie das Verhalten klassischer Systeme beschreiben, wenn aufgrund von Echtzeitanprüchen in Verbund mit Kanalproblemen ganze Koeffizienten zum Zeitpunkt der Darstellung nicht verfügbar sind. Daran würde auch ein zusätzlicher Fehlerschutz nichts ändern. Korrigiert werden kann dieser Fehler dann nur noch aus den anderen empfangenen Koeffizienten.

Es spricht aber überhaupt nichts dagegen, auch bei der vorgeschlagenen *Multiple-Description*-Lösung zusätzlich ein FEC-Verfahren zur Absicherung der einzelnen Koeffizienten gegen Bitfehler anzuwenden.

5.2 Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde das erarbeitete Verfahren, die Kombination einer skalierbar dekorrelierenden Transformation mit einer auf den so mehr oder weniger verbleibenden Korrelationen basierenden Schätzlösung, theoretisch und praktisch umfangreich evaluiert.

Weitere Arbeiten auf diesem Gebiet sollten sich daher mit der Integration dieser Technik oder Teilaspekten dieser Technik wie der Korrektur von Quantisierungsfehlern (s. Abschnitt 4.5.5) in bestehende Codierstandards beschäftigen.

Eine im Rahmen dieser Arbeit nicht untersuchte Frage, welche aber unbedingt untersucht werden sollte, ergibt sich aus den überraschend guten Ergebnissen für die DST im Rahmen der theoretischen Evaluierung im Abschnitt 4.4.

Die Ergebnisse zeigen, daß beim Übergang von der DCT zur DST mehr Signalkorrelationen in den Transformationskoeffizienten verbleiben, mit denen der Schätzer dann arbeiten kann.

Allgemein lassen sich für eine $N \times N$ -Transformation

$$\mathbf{y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} \tag{5.1}$$

zwei orthonormale Extremausprägungen von \mathbf{T} hinsichtlich der Dekorrelationseffizienz angeben:

1. Die KLT-Lösung \mathbf{T}_{KLT} als optimal dekorrelierende Lösung (optimale Quellencodierung, s. Abschnitt 1.1.1.5) und
2. Die Einheitstransformation \mathbf{I} , welche gemäß $\mathbf{x} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{x}$ alle Quellenkorrelationen im Signal beläßt.

Da sich orthonormale Matrizen nur hinsichtlich ihres Rotationswinkels unterscheiden, kann man die gesuchte Transformationsmatrix in der Form

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{KLT} \cdot \mathbf{T}_{Rot.}(\eta) \tag{5.2}$$

als Rotation der optimalen KLT-Lösung durch eine Rotationsmatrix beschreiben. Die Rotationsmatrix sollte dabei so parameterisiert werden, daß sich mit $\eta = 0$ für \mathbf{T} die KLT-Transformation und für $\eta = 1$ die Einheitstransformation ergibt.

Für den \mathbb{R}^2 ergibt sich allgemein für eine orthonormale Transformation mit den Basisvektoren $\mathbf{v}_0 = e^{-j\varphi}$ und $\mathbf{v}_1 = e^{-j\varphi+j\frac{\pi}{2}}$

$$\mathbf{T}_{ortho} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

und somit als Rotationsmatrix um den Winkel φ_0 beschreiben.

Somit ist auch die KLT-Matrix eine Rotationsmatrix um den Winkel φ_{KLT} . Die inverse Matrix ist dann eine Rotation um den Winkel $-\varphi_{KLT}$. Aus dieser Betrachtung heraus ergibt sich als mögliche Lösung für die in Gleichung 5.2 gesuchte Rotationsmatrix

$$\mathbf{T}_{Rot.} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi_{KLT} \cdot \eta) & -\sin(-\varphi_{KLT} \cdot \eta) \\ \sin(-\varphi_{KLT} \cdot \eta) & \cos(-\varphi_{KLT} \cdot \eta) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_{KLT} \cdot \eta) & \sin(\varphi_{KLT} \cdot \eta) \\ -\sin(\varphi_{KLT} \cdot \eta) & \cos(\varphi_{KLT} \cdot \eta) \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Allerdings hat man im \mathbb{R}^N ($N - 1$) Freiheitsgrade der Rotation, welche dann gemäß den Vorgaben für Gleichung 5.2 durch einen Parameter η parameterisiert werden müssen.

Ein Ansatz zur Lösung könnte dahingehend gesucht werden, daß man die KLT-Transformationsbasis zuerst in der Ebene verdreht, welche im \mathbb{R}^N durch den ersten Basisvektor der KLT (Hauptachse der ADV im \mathbb{R}^N) und dem ersten Basisvektor der Einheitstransformation gebildet wird.

Wird dann die KLT-Transformationsbasis noch so verdreht, daß auch der zweite Basisvektor mit dem zweiten Basisvektor der Einheitstransformation übereinstimmt, so erlaubt diese kombinierte Rotation die parameterisierte Metamorphose der KLT-Basis in die Einheitstransformation und umgekehrt.

Der Vorteil dieses Ansatzes liegt in der Verwendung von orthonormalen Transformationen, so daß die in dieser Ausarbeitung angesprochenen Probleme bei der Quantisierung nicht auftreten und auch sonst die umfangreiche Literatur zur Transformationscodierung mit orthonormalen Transformationen genutzt werden kann (z.B. [JN90]).

Nachteilig ist der Umstand, daß so nur die im Signal vorhandene Korrelation genutzt werden kann, da im Gegensatz zu der korrelierenden Transformation gemäß Abschnitt 2.1.1 keine zusätzlichen Korrelationen erzeugt werden können.

Zumindestens für die $N = 2$ -Transformation wurde in [WOVR01] anhand der Ableitung der kaskadierenden Transformation als optimale Form bei Vorgabe einer vollkommen generischen Matrix gezeigt, daß diese Transformation für den *multiple description coding*-Ansatz die optimale Lösung darstellt.

Allerdings ergeben sich für $N = 2$ hinsichtlich der KLT für AR(1)-Quellensignale und der DCT und der DST identische Lösungen, was für Transformationen höherer Ordnung nicht mehr gilt.

Für Dimensionen höherer Ordnung wurde durch die Simulationsergebnisse und die theoretische Evaluierung im Rahmen dieser Arbeit gezeigt, daß orthonormale Transformationen bei Einbeziehung des Quellencodierungsaspekts die besseren Ergebnisse erzielen. Somit lassen sich die Ergebnisse aus [WOVR01] nicht ohne

weiteres auf die höherdimensionale kaskadierte Form der korrelierenden Transformation übertragen.

Anhang A

Definitionen und Beweise

A.1 Definitionen

Definition A.1.1 (Das Kronecker-Produkt). Sei \mathbf{A} eine $m \times n$ Matrix und \mathbf{B} eine $p \times r$ Matrix. Dann ist das Kronecker-Produkt $\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ definiert als

$$\mathbf{C} = (a_{ij} \cdot \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Jedes Element der Matrix \mathbf{A} wird mit der Matrix \mathbf{B} multipliziert. Das Ergebnis ist eine $m \cdot p \times n \cdot r$ Matrix.

Definition A.1.2 (Verwendete Rechenregeln.).

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \otimes \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \quad (\text{A.2})$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^H = \mathbf{A}^H \otimes \mathbf{B}^H \quad (\text{A.3})$$

$$\text{spur}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{spur}(\mathbf{A}) \cdot \text{spur}(\mathbf{B}) \quad (\text{A.4})$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \quad (\mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ nicht singulär, s. [Bar04]}) \quad (\text{A.5})$$

Sind λ_i die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{(N,N)}$, so gilt

$$\text{spur}(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{A}(k, k) = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k \quad (\text{A.6})$$

und

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{k=0}^{N-1} \lambda_k. \quad (\text{A.7})$$

Definition A.1.3 (Statistische Unabhängigkeit). Zwei Ereignisse A und B sind statistisch unabhängig, wenn

$$P(A|B) = P(A) \quad (\text{A.8})$$

erfüllt ist. Für die Verbundwahrscheinlichkeit gilt dann

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (\text{A.9})$$

A.2 Beweise

Beweis A.2.1 (Inverse orthon. Transformationen). Zu beweisen ist, daß für eine orthonormale Transformation \mathbf{T} sich die inverse Transformation zu $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^H$ ergibt.

Für die inverse Transformation muß gelten

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{I}. \quad (\text{A.10})$$

Setzt man für die inverse Transformation $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^H$ an, so erhält man

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^H = \mathbf{I}. \quad (\text{A.11})$$

Schreibt man \mathbf{T} als Verbund der Zeilenvektoren, ergibt sich diese Form zu

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix} \cdot (\varphi_1^H \quad \varphi_2^H \quad \dots \quad \varphi_N^H) = \mathbf{I} \quad (\text{A.12})$$

was genau dann erfüllt ist, wenn gilt

$$\varphi_k \cdot \varphi_l^H = \langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = \begin{cases} 1 & : k = l \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Dies ist aber nichts anderes als die Forderung von orthonormalen Zeilenvektoren in \mathbf{T} , womit der Beweis erbracht ist.

Beweis A.2.2 (Energiebewahrung bei orthonormalen Transformationen). Unter der Annahme von mittelwertfreien Signalen ist die Energie eines mittels einer linearen Transformation \mathbf{T} transformierten Signals

$$\mathbf{y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} \quad (\text{A.14})$$

gleich

$$\sigma_y^2 = E \{ \mathbf{y}^H \cdot \mathbf{y} \} \quad (\text{A.15})$$

$$= E \{ (\mathbf{T} \cdot \mathbf{x})^H \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} \} = E \{ \mathbf{x}^H \cdot \mathbf{T}^H \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} \} . \quad (\text{A.16})$$

Für orthonormale Transformationen gilt aber (s. Beweis A.2.1) $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{I}$. Somit ergibt sich

$$\sigma_y^2 = E \{ \mathbf{x}^H \cdot \mathbf{x} \} \quad (\text{A.17})$$

$$= \sigma_x^2 , \quad (\text{A.18})$$

womit die orthonormale Transformation als energiebewahrend bewiesen ist.

Beweis A.2.3 (Berechnung von κ_N). Aus der Definition von κ_N als (konstantes¹) Betragsquadrat der Basisvektoren der Transformation N -ter Ordnung

$$\kappa_N = |\varphi_k|^2 , \quad (\text{A.19})$$

ergibt sich für die Spur von

$$\text{spur} ({}^N\mathbf{T} \otimes {}^N\mathbf{T}^H) = \sum_{k=1}^N \varphi_k \cdot \varphi_k^H \quad (\text{A.20})$$

$$= \sum \|\varphi_k\|^2 \quad (\text{A.21})$$

$$= N \cdot \kappa_N . \quad (\text{A.22})$$

Somit gilt also die Relation

$$\kappa_N = \frac{1}{N} \text{spur} ({}^N\mathbf{T} \otimes {}^N\mathbf{T}^H) . \quad (\text{A.23})$$

Damit gilt

$$\kappa_{2N} = \frac{1}{2N} \text{spur} ({}^{2N}\mathbf{T} \cdot {}^{2N}\mathbf{T}^H) \quad (\text{A.24})$$

$$= \frac{1}{2N} \cdot \text{spur} (({}^2\mathbf{T} \otimes {}^N\mathbf{T}) \cdot ({}^2\mathbf{T} \otimes {}^N\mathbf{T})^H) , \quad (\text{A.25})$$

was mit den Rechenregeln nach Gleichung A.3 und A.2

$$= \frac{1}{2N} \cdot \text{spur} (({}^2\mathbf{T} \otimes {}^2\mathbf{T}^H) \cdot ({}^N\mathbf{T} \otimes {}^N\mathbf{T}^H)) \quad (\text{A.26})$$

¹Gilt für die CCT als auch für die orthonormalen Transformationen

ergibt. Mit der Rechenregel Gl. A.4 und der Definition von κ_N aus Gleichung A.22 ergibt sich schließlich

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \text{spur}({}^2\mathbf{T} \otimes {}^2\mathbf{T}^H)}_{\kappa_2} \cdot \underbrace{\frac{1}{N} \cdot \text{spur}({}^N\mathbf{T} \otimes {}^N\mathbf{T}^H)}_{\kappa_N} \quad (\text{A.27})$$

$$\Rightarrow \kappa_{2N} = \kappa_2 \cdot \kappa_N, \quad (\text{A.28})$$

woraus sich rekursiv

$$\kappa_N = \kappa_2 \cdot (\kappa_2 \cdot (\dots \cdot \kappa_2)) \quad (\text{A.29})$$

$$\Rightarrow \kappa_N = \kappa_2^{\log_2 N} \quad (\text{A.30})$$

ergibt.

Beweis A.2.4 (Beweis der Äquivalenz von kaskadierter und separierter zweidimensionaler Transformationen durch Induktion). Die Transformationsgleichung der separierbaren zweidimensionalen Transformation ist gegeben durch (s. [JN90])

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}_V \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{T}_H^H \quad (\text{A.31})$$

für den Fall $N = 2$ also

$$\begin{pmatrix} y_0 & y_1 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 & v_1 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_0 & h_1 \\ h_2 & h_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.32})$$

Seien \mathbf{x} und \mathbf{y} die kaskadierten Zeilenvektoren von \mathbf{X} und \mathbf{Y} gemäß

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.33})$$

dann gilt

$$\mathbf{y} = (\mathbf{T}_V \otimes \mathbf{T}_H) \cdot \mathbf{x}. \quad (\text{A.34})$$

Beweis. Das Matrixprodukt aus Gleichung A.32 ergibt ausmultipliziert und in einen kaskadierten Vektor überführt

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} h_1 \cdot v_1 \cdot x_3 + h_0 \cdot v_1 \cdot x_2 + h_1 \cdot v_0 \cdot x_1 + h_0 \cdot v_0 \cdot x_0 \\ h_3 \cdot v_1 \cdot x_3 + h_2 \cdot v_1 \cdot x_2 + h_3 \cdot v_0 \cdot x_1 + h_2 \cdot v_0 \cdot x_0 \\ h_1 \cdot v_3 \cdot x_3 + h_0 \cdot v_3 \cdot x_2 + h_1 \cdot v_2 \cdot x_1 + h_0 \cdot v_2 \cdot x_0 \\ h_3 \cdot v_3 \cdot x_3 + h_2 \cdot v_3 \cdot x_2 + h_3 \cdot v_2 \cdot x_1 + h_2 \cdot v_2 \cdot x_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.35})$$

was sich in die Form

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \begin{pmatrix} h_0 & h_1 \\ h_2 & h_3 \end{pmatrix} & v_1 \cdot \begin{pmatrix} h_0 & h_1 \\ h_2 & h_3 \end{pmatrix} \\ v_2 \cdot \begin{pmatrix} h_0 & h_1 \\ h_2 & h_3 \end{pmatrix} & v_3 \cdot \begin{pmatrix} h_0 & h_1 \\ h_2 & h_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.36})$$

und damit in die Form

$$\mathbf{y} = ({}^2\mathbf{T}_V \otimes {}^2\mathbf{T}_H) \cdot \mathbf{x} \quad (\text{A.37})$$

umschreiben läßt. Dieses Prinzip gilt auch für Transformationen höherer Ordnung (überprüft für $N = 2, 4, 6, 8$), so daß sich induktiv der behauptete Zusammenhang

$$\mathbf{y} = ({}^N\mathbf{T}_V \otimes {}^N\mathbf{T}_H) \cdot \mathbf{x} \quad (\text{A.38})$$

ergibt. □

Anhang B

Quelltexte

B.1 Verifikation der Äquivalenz von kaskadierter und separierter zweidimensionaler Transformation durch Induktion.

Listing B.1: Maxima-Skript zur Verifikation der Äquivalenz von kaskadierter und separierter zweidimensionaler Transformation durch Induktion.

```
/* Verifikation , das mit Lambda = Th odot Tv
   und y,x als kaskadierte Versionen
   von Y bzw. X gilt:
       y=Lambda*x
       Y=Tv*X*Th^H
*/

load (linearalgebra);

N: 2;

X: genmatrix(x, N, N);
Y: genmatrix(y, N, N);
Th: genmatrix(phi, N, N);
Tv: genmatrix(psi, N, N);

Lambda: kronecker_product (Th, Tv);

Y2D: expand(Th.X.transpose(Tv));

xr : genmatrix(a,N*N,1);
```

```
yr1 : genmatrix(a,N*N,1);

n : 1;
for k : 1 thru N do
for l : 1 thru N do
block(xr[n,1] : X[k,l], yr1[n,1] : Y2D[k,l], n : n+1);

yr2: Lambda.xr;

if (yr1=yr2) then disp("These_stimmt!")
else disp("These_stimmt_nicht!");
```

B.2 Berechnung von $\gamma(N, \alpha, \rho)$ für die CCT

Listing B.2: Maxima-Skript zur Berechnung von $\gamma(N, \alpha, \rho)$ für die CCT

```
kill(all);
load (descriptive);

m: 1;
N: 2^m;
rho: 0.96;
eps: 0.2;

alpha: 1.0/sqrt(2.0)+eps;

Rxx: genmatrix (lambda ([i, j], rho^abs(j - i)), N, N);
sigmay: genmatrix (lambda ([i, j], 0), 1, N);

Tbasis: matrix([alpha, 1/(2*alpha)],
[-alpha, 1/(2*alpha)]);
Tinvbasis: matrix([1/(2*alpha), -1/(2*alpha)],
[alpha, alpha]);
T: Tbasis;
Tinv: Tinvbasis;

for l : 1 thru m-1 do
block(T: kronecker_product(T, Tbasis),
Tinv: kronecker_product(Tinv, Tinvbasis));

Ryy: expand(T.Rxx.transpose(T));
```

```
kappa: row(T,1).transpose(row(T,1));  
for k: 1 thru N do sigmay[1,k]: Ryy[k,k];  
t: geometric_mean(transpose(sigmay)), numer;  
Gamma: kappa*t;
```

Literaturverzeichnis

- [AH92] A. N. Akansu and R. A. Haddad. *Multiresolution Signal Decomposition, Transforms, Subbands, and Wavelets*. Academic Press, San Diego, CA, 1992.
- [AR05] Tinku Acharya and Ajoy K. Ray. *Image Processing - Principles and Applications*. Wiley-Interscience, 2005.
- [Ash72] Robert B. Ash. *Real analysis and probability [by] Robert B. Ash*. Academic Press New York, 1972.
- [Bar04] H.-J. Bartsch. *Taschenbuch mathematischer Formeln*. Harri Deutsch, Thun[u.a.], 2004.
- [BH97] R. Brown and P. Hwang. *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*. Wiley, 1997.
- [Cla86] R. R. Clarke. *Transform coding of images*. Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA, USA, 1986.
- [GK98] Vivek K. Goyal and Jelena Kovacevic. Optimal multiple description transform coding of gaussian vectors. In *Data Compression Conference*, pages 388–397, 1998.
- [GKAV] V. Goyal, J. Kovacevic, R. Arean, and M. Vetterli. Multiple description transform coding of images. pages 674–678.
- [Goy01a] V. K. Goyal. Multiple description coding: compression meets the network. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 18(5):74–93, 2001.
- [Goy01b] Vivek K. Goyal. Multiple description coding: Compression meets the network. *IEEE Signal Processing Magazine*, 18(5):74–93, September 2001.
- [Hay96] Monson H. Hayes. *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*. Wiley, March 1996.

- [HG] X. Henocq and C. Guillemot. Source adaptive error control for real-time video over the internet.
- [Huf52] David A. Huffman. A method for the construction of minimum-redundancy codes. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 40(9):1098–1101, September 1952.
- [Hän97] Eberhard Hänsler. „*Statistische Signale*“. Springer Verlag, 1997.
- [ITP] It++-bibliothek. <http://itpp.sourceforge.net/>.
- [JAM] Jama - java matrix package. <http://math.nist.gov/javanumerics/jama/>.
- [JN90] Nuggehalli S. Jayant and P. Noll. *Digital Coding of Waveforms: Principles and Applications to Speech and Video*. Prentice Hall Professional Technical Reference, 1990.
- [Jol02] I. T. Jolliffe. *Principal Component Analysis*. Springer, 2002.
- [Kay93] S. M. Kay. *Fundamentals of statistical signal processing : Estimation theory*. Signal Processing Series. Prentice Hall, 1993.
- [Kay97] S. M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. Prentice Hall, 1997.
- [Krü06] Guido Krüger. *Handbuch der Java-Programmierung*. Addison-Wesley, München [u.a.], 4., aktualisierte aufl., studenten-ausg. edition, 2006.
- [KS07] Rüdiger Knörig and Thomas Sikora. Mdc image coding using cascaded correlating transforms. San Jose, CA, USA, January 2007. Electronic Imaging 2007.
- [LNA98] Jin Lu, Aria Nosratinia, and Behnaam Aazhang. Progressive source-channel coding of images over bursty error channels. In *In Proc. Int’l Conf. Image Processing*, pages 127–131. IEEE, 1998.
- [Nel91] Mark Nelson. *The Data Compression Book*. Henry Holt and Co., Inc., New York, NY, USA, 1991.
- [Nol00] Prof. Dr.-Ing. Peter Noll. *Statistische Nachrichtentheorie*. TU Berlin, 1999/2000.
- [Ohm95] Jens-Rainer Ohm. *Digitale Bildcodierung - Repräsentation, Kompression und Übertragung von Bildsignalen*, page 487. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1995. ISBN 3-540-58579-6.

- [Ohm99] Jens-Rainer Ohm. Bildsignalverarbeitung für Multimediasysteme. Skript, Institut für Nachrichtentechnik und theoretische Elektrotechnik der TU Berlin, 1999.
- [PAP85] A PAPOULIS. *Probability, random variables and stochastic processes*. McGraw-Hill, London, 1985.
- [PN08a] Thomas Sikora Peter Noll. *Nachrichtenübertragung II*. TU Berlin, 2008.
- [PN08b] Thomas Sikora Peter Noll. *Quellencodierung*. TU Berlin, 2008.
- [PN08c] Thomas Sikora Peter Noll. *Signale und Systeme*. TU Berlin, 2008.
- [PN08d] Thomas Sikora Peter Noll. *Statistische Nachrichtentheorie*. TU Berlin, 2008.
- [Por96] Boaz Porat. *A Course in Digital Signal Processing*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1996.
- [PR] S. Bauch S. Reuther P. Runge, R. Phillip. *Communication in noisy environments*.
- [PW93] Donald B. Percival and Andrew T. Walden. Spectral analysis for physical applications : multitaper and conventional univariate techniques / donald b. percival and andrew t. walden, 1993.
- [RAG00] J. Kovacevic R. Arean and V. Goyal. Multiple description perceptual audio coding with correlating transforms, 2000.
- [SCH91] Louis L. SCHARF. *Statistical signal processing*. Addison-Wesley, Reading, 1991. With Cedric Demeure collaborating on chapters 10 and 11.
- [Sha59] Claude E. Shannon. Coding theorems for a discrete source with a fidelity criterion. volume 7, part 4, pages 142–163, New York, NY, USA, March 1959.
- [Shl05] Jonathon Shlens. A tutorial on principal component analysis, December 2005.
- [SL96] Thomas Sikora and Hui Li. Optimal block-overlapping synthesis transforms for coding images and video at very low bit-rates. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 6(2):157–167, 1996.
- [Tan89] A. Tanenbaum. *Computer Networks*. Prentice-Hall, second edition, 1989.

- [TKM00] Wynn C. Stirling Todd K. Moon. *Mathematical Methods and Algorithms for Signal Processing*. Prentice-Hall, 2000.
- [VK95] Martin Vetterli and Jelena Kovačević. *Wavelets and subband coding*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1995.
- [Wag95] Bill. Waggener. Pulse code modulation techniques : with applications in communications and data recording / bill waggener, 1995.
- [Wie64] Norbert Wiener. *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series*. The MIT Press, 1964.
- [WOR99] Y. Wang, M. Orchard, and A. Reibman. Multiple description coding using pairwise correlating transforms: analysis for gaussian sources and application to images, 1999.
- [WOVR01] Yao Wang, Michael T. Orchard, Vinay Vaishampayan, and Amy R. Reibman. Multiple description coding using pairwise correlating transforms. *IEEE Trans. Image Processing*, 10:351–366, 2001.
- [ZRMM] Michele Zorzi, Ramesh R. Rao, Senior Member, and Laurence B. Milstein. accepted for publication in the iee transactions on vehicular technology 1 arq error control for fading mobile radio channels.